La nascita della teoria elettrogravitazionale di Weyl

Alessandro Afriat
Istituto di Filosofia
Università di Urbino
afriat@uniurb.it

Bergamo, 22 giugno 2007

Tesi

- la teoria elettrogravitazionale (TEG) di Weyl uscì dalla ‘giustizia matematica,’ ossia dalla ‘parità’ di direzione e lunghezza (PDL: un vettore è fatto di direzione e lunghezza; le due caratteristiche dovevano godere degli stessi diritti, anzi delle stesse libertà)

Ryckman

- prendo le mosse dal libro

  The reign of relativity: Philosophy in physics 1915-1925
  (Oxford University Press 2005)

  di Thomas Ryckman

- propongo una diversa ricostruzione della genesi della TEG

Ryckman

- prendo le mosse dal libro

  The reign of relativity: Philosophy in physics 1915-1925
  (Oxford University Press 2005)

  di Thomas Ryckman

- propongo una diversa ricostruzione della genesi della TEG

Unificazione voluta?

- viene quasi sempre sostenuto (da Folland, Trautman, Perlick, Vizgin ed altri) che l'unificazione di gravitazione ed elettromagnetismo raggiunta nella teoria di Weyl fosse **voluta**

- la teoria scaturì invece, come hanno scritto Bergia e Ryckman, da considerazioni aprioristiche

Unificazione voluta?

- viene quasi sempre sostenuto (da Folland, Trautman, Perlick, Vizgin ed altri) che l'unificazione di gravitazione ed elettromagnetismo raggiunta nella teoria di Weyl fosse **voluta**

- la teoria scaturì invece, come hanno scritto Bergia e Ryckman, da considerazioni aprioristiche

“Gravitation und Elektrizität”

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465

Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die $\boxed{\text{überraschenderweise}}$, auf die Welt angewendet, **nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt**.

Einstein a Weyl, 10 dicembre 1918

Übrigens müssen Sie nicht glauben, daß ich von der Physik her dazu gekommen bin, neben der quadratische noch die lineare Differentialform in die Geometrie einzuführen; sondern ich wollte wirklich diese "Inkonsequenz," die mir schon immer ein Dorn im Auge gewesen war, endlich einmal beseitigen und bemerkte dann zu meinem eigenen Erstaunen: das sieht so aus, als erklärt es die Elektrizität.

Ma da quali considerazioni aprioristiche uscì la TEG?

- due candidati:

  1. Ryckman riconduce la TEG a un programma ‘infinitesimale’ con radici husserliane

  2. io appunto la riconduco alla parità di direzione e lunghezza

Ma da quali considerazioni aprioristiche uscì la TEG?

- due candidati:

  1. Ryckman riconduce la TEG a un programma ‘infinitesimale’ con radici husserliane

  2. io appunto la riconduco alla parità di direzione e lunghezza

Perché ricondurre la TEG alla parità di direzione e lunghezza?

- sorprendentemente la PDL è **logicamente sufficiente** (per la derivazione di quasi tutta la TEG), mentre il programma infinitesimale, così come compare nel 1918, è troppo vago per esserlo

- la PDL ha una presenza maggiore, più evidente, nel contesto della scoperta—in cui il programma infinitesimale compare solo nella forma di qualche accenno, di un paio di slogan, senza motivazione né fondamento

- il programma infinitesimale prenderà corpo solo negli anni a venire, in un successivo 'contesto della giustificazione,' in cui verrà appunto giustificato e motivato come 'telescetticismo' retto da una sottile epistemologia che Ryckman riconduce a Husserl e che porta alla delegittimazione dei confronti a distanza

Perché ricondurre la TEG alla parità di direzione e lunghezza?

- sorprendentemente la PDL è **logicamente sufficiente** (per la derivazione di quasi tutta la TEG), mentre il programma infinitesimale, così come compare nel 1918, è troppo vago per esserlo

- la PDL ha una presenza maggiore, più evidente, nel contesto della scoperta—in cui il programma infinitesimale compare solo nella forma di qualche accenno, di un paio di slogan, senza motivazione né fondamento

- il programma infinitesimale prenderà corpo solo negli anni a venire, in un successivo 'contesto della giustificazione,' in cui verrà appunto giustificato e motivato come 'telescetticismo' retto da una sottile epistemologia che Ryckman riconduce a Husserl e che porta alla delegittimazione dei confronti a distanza

Perché ricondurre la TEG alla parità di direzione e lunghezza?

- sorprendentemente la PDL è **logicamente sufficiente** (per la derivazione di quasi tutta la TEG), mentre il programma infinitesimale, così come compare nel 1918, è troppo vago per esserlo

- la PDL ha una presenza maggiore, più evidente, nel contesto della scoperta—in cui il programma infinitesimale compare solo nella forma di qualche accenno, di un paio di slogan, senza motivazione né fondamento

- il programma infinitesimale prenderà corpo solo negli anni a venire, in un successivo ‘contesto della giustificazione,’ in cui verrà appunto giustificato e motivato come ‘telescetticismo’ retto da una sottile epistemologia che Ryckman riconduce a Husserl e che porta alla delegittimazione dei confronti a distanza

Presenza velata della PDL

- nel contesto della scoperta la parità di direzione e lunghezza ha una presenza esplicita, ma anche una forte presenza leggermente velata, nei brani che seguono

"Gravitation und Elektrizität"

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918

Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen: 1. sie müssen **invariant** sein **gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen**, 2. sie müssen ungeändert bleiben, **wenn man die g_{ik} durch λg_{ik} ersetzt**, wo λ eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist.

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.396

Zum Zwecke der analytischen Darstellung denken wir uns 1. ein bestimmtes Koordinatensystem und 2. den an jeder Stelle willkürlich zu wählenden Proportionalitätsfaktor im skalaren Produkt festgelegt; damit ist ein “**Bezugssystem**”[9] für die analytische Darstellung gewonnen. [. . .]

⋮

9. Ich unterscheide also zwischen “Koordinatensystem” und “Bezugssystem.”

“Reine Infinitesimalgeometrie”
Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.398

In alle Größen oder Beziehungen, welche metrische Verhältnisse analytisch darstellen, müssen demnach die Funktionen g_{ik}, φ_i in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet 1. gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation (“Koordinaten-Invarianz”) und 2. gegenüber der Ersetzung von (7) durch (8) (“Maßstab-Invarianz”).

“Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie
Annalen der Physik **59**, 1919, p.101

Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf **Koordinaten** bezogen sein und müssen 2. gewisse **Maßeinheiten** festgelegt werden. Die bisherige E i n s t e i n sche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheit, zu gewinnen.

Contrapposizione coordinate-calibro

- la contrapposizione coordinate-calibro può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Contrapposizione coordinate-calibro

- la contrapposizione coordinate-calibro può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Contrapposizione coordinate-calibro

- la contrapposizione coordinate-calibro può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Coordinate e direzione

- una ricalibrazione $g \mapsto e^{2\lambda}g$ induce una trasformazione $V \mapsto e^{\lambda}V$, o $V^a \mapsto e^{\lambda}V^a$, mediante

$$e^{2\lambda}g(V,V) = g(e^{\lambda}V, e^{\lambda}V) = g(e^{\lambda}\partial_a, e^{\lambda}\partial_b)V^aV^b = g(\partial_a, \partial_b)e^{\lambda}V^a e^{\lambda}V^b$$

- la direzione, data dai rapporti

$$e^{\lambda}V^0 : e^{\lambda}V^1 : e^{\lambda}V^2 : e^{\lambda}V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

rimane inalterata

Coordinate e direzione

- una ricalibrazione $g \mapsto e^{2\lambda} g$ induce una trasformazione $V \mapsto e^{\lambda} V$, o $V^a \mapsto e^{\lambda} V^a$, mediante

$$e^{2\lambda} g(V, V) = g(e^{\lambda} V, e^{\lambda} V) = g(e^{\lambda} \partial_a, e^{\lambda} \partial_b) V^a V^b = g(\partial_a, \partial_b) e^{\lambda} V^a e^{\lambda} V^b$$

- la direzione, data dai rapporti

$$e^{\lambda} V^0 : e^{\lambda} V^1 : e^{\lambda} V^2 : e^{\lambda} V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

  rimane inalterata

Analogia

DIREZIONE	**LUNGHEZZA**
coordinate (a meno di ricalibrazioni)	calibro
trasporto parallelo	trasporto congruente
gravitazione	elettricità
connessione di Levi-Civita Γ^a_{bc}	connessione di lunghezza A
curvatura direzionale R^a_{bcd} (di Γ^a_{bc})	curvatura di lunghezza $F = dA$
coordinate geodetiche y^a (a P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	calibro geodetico (a P) $A' = A + d\lambda = 0$
principio d'equivalenza: $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	principio d'equival.: $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

Analogia

DIREZIONE	**LUNGHEZZA**
coordinate (a meno di ricalibrazioni)	calibro
trasporto parallelo	trasporto congruente
gravitazione	elettricità
connessione di Levi-Civita Γ^a_{bc}	connessione di lunghezza A
curvatura direzionale R^a_{bcd} (di Γ^a_{bc})	curvatura di lunghezza $F = dA$
coordinate geodetiche y^a (a P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	calibro geodetico (a P) $A' = A + d\lambda = 0$
principio d'equivalenza: $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	principio d'equival.: $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

Varietà affinamente connessa

- Weyl dice la varietà M **affinamente connessa** se lo spazio tangente $T_P M$ ad ogni punto $P \in M$ è connesso a tutti i punti adiacenti $T_{P'} M$ mediante un'applicazione

$$\mathfrak{T}_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \mathfrak{T}_X V_P$$

lineare sia nell'argomento principale $V_P \in T_P M$ sia in quello (corto) direzionale

$$X = P' - P,$$

dove P' (essendo vicino a P) e quindi X vengono visti come appartenenti a $T_P M$

- essendo lineare, $\mathfrak{T}_X$ sarà rappresentata da una matrice, ossia da

$$\mathfrak{T}^a_c = \langle dx^a, \mathfrak{T}_X \partial_c \rangle = \sum_b \mathfrak{T}^a_{bc} X^b = \sum_b \langle dx^a, \mathfrak{T}_{\partial_b} \partial_c \rangle \langle dx^b, X \rangle$$

Varietà affinamente connessa

- Weyl dice la varietà M **affinamente connessa** se lo spazio tangente $T_P M$ ad ogni punto $P \in M$ è connesso a tutti i punti adiacenti $T_{P'} M$ mediante un'applicazione

$$\mathfrak{T}_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \mathfrak{T}_X V_P$$

  lineare sia nell'argomento principale $V_P \in T_P M$ sia in quello (corto) direzionale

$$X = P' - P,$$

  dove P' (essendo vicino a P) e quindi X vengono visti come appartenenti a $T_P M$

- essendo lineare, $\mathfrak{T}_X$ sarà rappresentata da una matrice, ossia da

$$\mathfrak{T}^a_c = \langle dx^a, \mathfrak{T}_X \partial_c \rangle = \sum_b \mathfrak{T}^a_{bc} X^b = \sum_b \langle dx^a, \mathfrak{T}_{\partial_b} \partial_c \rangle \langle dx^b, X \rangle$$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$X^b \text{ e } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto

$$-\sum_{bc} \Gamma^a_{bc} X^b V^c$$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$X^b \text{ e } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto

$$-\sum_{bc} \Gamma^a_{bc} X^b V^c$$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$X^b \text{ e } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto

$$-\sum_{bc} \Gamma^a_{bc} X^b V^c$$

Coordinate geodetiche

- rispetto alle coordinate **geodetiche** y^a che annullano

$$\Gamma^a_c = \sum_b \Gamma^a_{bc} X^b = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{c(y)} \rangle \ \text{e} \ \delta V^a,$$

lasciando invariate le componenti V^a, la matrice $\mathfrak{T}^a_c$ diventa l'identità

$$\delta^a_c = \langle dy^a, \mathfrak{T}_X \partial_{c(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- fisicamente ha a che vedere col principio di equivalenza, secondo il quale un campo gravitazionale Γ^a_{bc} può sempre essere eliminato o generato a P da un'opportuna scelta di coordinate

Coordinate geodetiche

- rispetto alle coordinate **geodetiche** y^a che annullano

$$\Gamma^a_c = \sum_b \Gamma^a_{bc} X^b = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{c(y)} \rangle \text{ e } \delta V^a,$$

lasciando invariate le componenti V^a, la matrice $\mathfrak{T}^a_c$ diventa l'identità

$$\delta^a_c = \langle dy^a, \mathfrak{T}_X \partial_{c(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- fisicamente ha a che vedere col principio di equivalenza, secondo il quale un campo gravitazionale Γ^a_{bc} può sempre essere eliminato o generato a P da un'opportuna scelta di coordinate

Dalla direzione alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento

- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)

- scompare l'indice superiore (l'indice 'dell'immagine') di Γ^a_{bc}, lasciando

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio

Dalla direzione alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento

- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

  chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)

- scompare l'indice superiore (l'indice 'dell'immagine') di Γ^a_{bc}, lasciando

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio

Dalla direzione alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento

- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

  chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)

- scompare l'indice superiore (l'indice 'dell'immagine') di Γ^a_{bc}, lasciando

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio

Dalla direzione alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento

- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza
$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$
chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)

- scompare l'indice superiore (l'indice 'dell'immagine') di Γ^a_{bc}, lasciando
$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio

La connessione della lunghezza

- se ora prendiamo un'unica componente dell'argomento principale $\{V^0, \ldots, V^3\}$, chiamandola l (diventerà la lunghezza quadra), scompare anche il secondo indice inferiore di Γ_{bc}, lasciando

$$\delta l = \sum_c \Gamma_c l X^c,$$

dove le $\Gamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sono le componenti di una uno-forma, chiamata A con l'elettricità in mente ($c = 0, \ldots, 3$)

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione lineare $A(l, X) = \delta l$ di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una uno-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

  dove α è la uno-forma DLQ

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione lineare $A(l, X) = \delta l$ di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una uno-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

dove α è la uno-forma DLQ

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione lineare $A(l, X) = \delta l$ di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una uno-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l\langle A, X \rangle,$$

  dove α è la uno-forma DLQ

Notazione di Weyl

- Weyl in realtà scrive

$$dl = -l d\varphi,$$

che possiamo tradurre

$$\alpha = -lA$$

- le d fuorvianti non possono essere intese globalmente (e nemmeno localmente, nella TEG; perché $F = d^2\varphi$ diventerà la due-forma di Faraday e $d^2 = 0$)

Notazione di Weyl

- Weyl in realtà scrive
$$dl = -l d\varphi,$$
che possiamo tradurre
$$\alpha = -lA$$

- le d fuorvianti non possono essere intese globalmente (e nemmeno localmente, nella TEG; perché $F = d^2\varphi$ diventerà la due-forma di Faraday e $d^2 = 0$)

Esattezza

- ma una uno-forma **esatta** $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu} = e^{\mu_1 - \mu_0}$$

la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una uno-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- pertanto serviva una uno-forma A con quadrirotore $F = dA$ non (ovunque) nullo

Esattezza

- ma una uno-forma **esatta** $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu} = e^{\mu_1 - \mu_0}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una uno-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- pertanto serviva una uno-forma A con quadrirotore $F = dA$ non (ovunque) nullo

Esattezza

- ma una uno-forma **esatta** $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu} = e^{\mu_1 - \mu_0}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una uno-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- pertanto serviva una uno-forma A con quadrirotore $F = dA$ non (ovunque) nullo

Esattezza

- ma una uno-forma **esatta** $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

  $$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu} = e^{\mu_1 - \mu_0}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una uno-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- pertanto serviva una uno-forma A con quadrirotore $F = dA$ non (ovunque) nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la uno-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà una uno-forma non necessariamente esatta

- l non sarà generalmente nulla, e quindi la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un punto, dove il calibro λ è **geodetico**

- essendo $d\lambda$ una uno-forma, lo sarà anche A

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A **in un punto**, e quindi A non deve nemmeno essere chiusa

Calibro geodetico

- la richiesta che la uno-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà una uno-forma non necessariamente esatta

- l non sarà generalmente nulla, e quindi la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un punto, dove il calibro λ è **geodetico**

- essendo $d\lambda$ una uno-forma, lo sarà anche A

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A **in un punto**, e quindi A non deve nemmeno essere chiusa

Calibro geodetico

- la richiesta che la uno-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà una uno-forma non necessariamente esatta

- l non sarà generalmente nulla, e quindi la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un punto, dove il calibro λ è **geodetico**

- essendo $d\lambda$ una uno-forma, lo sarà anche A

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A **in un punto**, e quindi A non deve nemmeno essere chiusa

Calibro geodetico

- la richiesta che la uno-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà una uno-forma non necessariamente esatta

- l non sarà generalmente nulla, e quindi la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un punto, dove il calibro λ è **geodetico**

- essendo $d\lambda$ una uno-forma, lo sarà anche A

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A **in un punto**, e quindi A non deve nemmeno essere chiusa

Raum Zeit Materie
Berlino, Springer, 1923, p.122

Ein Punkt P hängt also mit seiner Umgebung metrisch zusammen, wenn von jeder Strecke in P feststeht, welche Strecke aus ihr durch kongruente Verpflanzung von P nach dem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' hervorgeht. Die einzige Forderung, welche wir an diesen Begriff stellen (zugleich die weitgehendste, die überhaupt möglich ist), ist diese: Die Umgebung von P läßt sich so eichen, daß die Maßzahl einer jeden Strecke in P durch kongruente Verpflanzung nach den unendlich benachbarten Punkten keine Änderung erleidet.

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono per esempio essere annullate

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono per esempio essere annullate

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono per esempio essere annullate

L'elettromagnetismo

- vedendo $F = dA$ e la sua conseguenza $dF = 0$, Weyl non poteva non riconoscere il quadripotenziale elettromagnetico A, la due-forma di Faraday $F = dA$, e le due equazioni omogenee di Maxwell espresse da $dF = 0$, ossia

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

  (per non parlare di un 'principio d'equivalenza' elettromagnetico, secondo il quale la DSLQ δl e la uno-forma DLQ α, così come il potenziale elettromagnetico A, possono essere generati o eliminati a un punto da un opportuno calibro λ)

In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

dove $A_a = A(\partial_a)$, le E_x, E_y, E_z sono le componenti del campo elettrico e le B_x, B_y, B_z quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

dove $A_a = A(\partial_a)$, le E_x, E_y, E_z sono le componenti del campo elettrico e le B_x, B_y, B_z quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

Elettromagnetismo lontano dalle sorgenti

- le due equazioni omogenee di Maxwell vengono date dalla tre-forma nulla

$$dF = \frac{1}{2}\sum_{bc} dF_{bc} \wedge dx^b \wedge dx^c = \frac{1}{6}\sum_{abc} \partial_a F_{bc}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$$

con componenti $dF(\partial_a, \partial_b, \partial_c) = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

- si arriva alle altre due equazioni (in forma omogenea, cioè senza sorgenti) mediante una trasformazione ‘di Hodge’

Elettromagnetismo lontano dalle sorgenti

- le due equazioni omogenee di Maxwell vengono date dalla tre-forma nulla

$$dF = \frac{1}{2}\sum_{bc} dF_{bc} \wedge dx^b \wedge dx^c = \frac{1}{6}\sum_{abc} \partial_a F_{bc}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$$

con componenti $dF(\partial_a, \partial_b, \partial_c) = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

- si arriva alle altre due equazioni (in forma omogenea, cioè senza sorgenti) mediante una trasformazione 'di Hodge'

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.385

Nach dieser Theorie ist **alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik**; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. [. . .][1]

⋮

1. Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico

- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito

- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l’integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l’assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l’integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico

- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito

- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l’assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Gauge freedom

- since only the curl $F = dA$ 'counts,' there is freedom to add the differential $d\mu$ of a function μ to A

- by transforming the 4-potential according to

$$A \to A' = A + d\mu,$$

the curl

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

remains unchanged

Gauge freedom

- since only the curl $F = dA$ 'counts,' there is freedom to add the differential $d\mu$ of a function μ to A

- by transforming the 4-potential according to

$$A \to A' = A + d\mu,$$

the curl

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

remains unchanged

Further 'dilation'

- even if the curl is indifferent to the differential $d\mu$, length changes

- transporting X_0 from point P_0 with value $\mu_0 = \mu(P_0)$ to point P_1 with value $\mu_1 = \mu(P_1)$, the final squared length $g_1(X_1, X_1)$ acquires the additional (integrable) factor $e^{\Delta\mu}$, where $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- for the function μ dilates according to:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- and hence

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Further 'dilation'

- even if the curl is indifferent to the differential $d\mu$, length changes

- transporting X_0 from point P_0 with value $\mu_0 = \mu(P_0)$ to point P_1 with value $\mu_1 = \mu(P_1)$, the final squared length $g_1(X_1, X_1)$ acquires the additional (integrable) factor $e^{\Delta\mu}$, where $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- for the function μ dilates according to:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- and hence

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Further ‘dilation’

- even if the curl is indifferent to the differential $d\mu$, length changes

- transporting X_0 from point P_0 with value $\mu_0 = \mu(P_0)$ to point P_1 with value $\mu_1 = \mu(P_1)$, the final squared length $g_1(X_1, X_1)$ acquires the additional (integrable) factor $e^{\Delta\mu}$, where $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- for the function μ dilates according to:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- and hence

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Further ‘dilation’

- even if the curl is indifferent to the differential $d\mu$, length changes

- transporting X_0 from point P_0 with value $\mu_0 = \mu(P_0)$ to point P_1 with value $\mu_1 = \mu(P_1)$, the final squared length $g_1(X_1, X_1)$ acquires the additional (integrable) factor $e^{\Delta\mu}$, where $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- for the function μ dilates according to:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- and hence

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Conformal transformation

- to re-establish the invariance of length we have to compensate multiplying the metric by the conformal factor e^{μ}:

$$g \to g' = e^{\mu} g$$

- together the two transformations leave length unchanged:

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- the exponents cancel, leaving

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Conformal transformation

- to re-establish the invariance of length we have to compensate multiplying the metric by the conformal factor e^{μ}:

$$g \longrightarrow g' = e^{\mu} g$$

- together the two transformations leave length unchanged:

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- the exponents cancel, leaving

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Conformal transformation

- to re-establish the invariance of length we have to compensate multiplying the metric by the conformal factor e^{μ}:

$$g \longrightarrow g' = e^{\mu} g$$

- together the two transformations leave length unchanged:

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- the exponents cancel, leaving

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

‘Metric’ connection

- the relationship between the above two transformations is also expressed by **Weyl compatibility**

- the metric g is (strictly) **compatible** with the connection ∇ if

$$\nabla g = 0$$

- in that case the straightest geodesics (satisfying $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) will also be ‘stationary,’ satisfying

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

as well

‘Metric’ connection

- the relationship between the above two transformations is also expressed by **Weyl compatibility**

- the metric g is (strictly) **compatible** with the connection ∇ if

$$\nabla g = 0$$

- in that case the straightest geodesics (satisfying $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$) will also be ‘stationary,’ satisfying

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})}\, ds = \delta \int ds = 0$$

as well

‘Metric’ connection

- the relationship between the above two transformations is also expressed by **Weyl compatibility**

- the metric g is (strictly) **compatible** with the connection ∇ if

$$\nabla g = 0$$

- in that case the straightest geodesics (satisfying $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) will also be ‘stationary,’ satisfying

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

as well

Weyl compatibility

- the recalibrated metric $e^{\mu}g$ will only satisfy the weaker 'Weyl compatibility' expressed by
$$\nabla(e^{\mu}g) = d\mu \otimes (e^{\mu}g),$$
in which the two compensating transformations are juxtaposed

- as the differential $d\lambda = 0$ of a constant λ vanishes, every constant multiple $e^{\lambda}g$ of g will be compatible with ∇:
$$\nabla(e^{\lambda}g) = d\lambda \otimes (e^{\lambda}g) = 0 \otimes (e^{\lambda}g) = 0$$

Weyl compatibility

- the recalibrated metric $e^{\mu}g$ will only satisfy the weaker 'Weyl compatibility' expressed by
$$\nabla(e^{\mu}g) = d\mu \otimes (e^{\mu}g),$$
in which the two compensating transformations are juxtaposed

- as the differential $d\lambda = 0$ of a constant λ vanishes, every constant multiple $e^{\lambda}g$ of g will be compatible with ∇:
$$\nabla(e^{\lambda}g) = d\lambda \otimes (e^{\lambda}g) = 0 \otimes (e^{\lambda}g) = 0$$