

# La teoria elettrogravitazionale di Weyl

Alessandro Afriat  
Istituto di Filosofia  
Università di Urbino  
afriat@uniurb.it

*Dipartimento di fisica, Dipartimento di matematica  
Università di Bologna  
7 marzo 2007*

# Indice

**Introduzione**

**Einstein (1915)**

**Levi-Civita (1917)**

**Weyl (1918-)**

I due pregiudizi

La teoria elettrogravitazionale

Il dibattito con Einstein

Il metodo causale-inerziale

# Introduzione

# Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

# Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

# Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

# Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

# Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo pregiudizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

# Einstein (1915)

# Struttura affine

- al centro della teoria gravitazionale di Einstein sono i simboli  $\Gamma_{bc}^a$ , i quali, fornendo un criterio di ‘drittezza’ (**parametrizzata**, quindi **anche tangenziale**) anzi di accelerazione nulla o ‘inerzialità,’ determinano la derivata covariante

$$A_{a;b} = \frac{\partial A_a}{\partial x_b} - \sum_c \Gamma_{ab}^c A_c$$

e quindi l’equazione del moto, la ‘*lex prima*’

$$0 = \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \sum_{bc} \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds},$$

dove il parametro  $s$  è **affine**

# Parametro affine

- parametro ‘inerziale,’ che non ‘accelera’ lungo la linea d’universo
- dà il comportamento (‘proprio’) di un orologio ‘corretto’ a meno di una trasformazione lineare o ‘affine’  $\alpha s + \beta$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono delle costanti che determinano rispettivamente l’unità di tempo e lo zero
- $\alpha$  tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica  $g : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  è un’applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori  $\pm 1$  (una volta) e  $\mp 1$  (tre volte),  $\partial_0$  è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e  $T_P M$  è lo spazio vettoriale che all’evento  $P$  è tangente all’universo  $M$ )

## Parametro affine

- parametro ‘inerziale,’ che non ‘accelera’ lungo la linea d’universo
- dà il comportamento (‘proprio’) di un orologio ‘corretto’ a meno di una trasformazione lineare o ‘affine’  $\alpha s + \beta$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono delle costanti che determinano rispettivamente l’unità di tempo e lo zero
- $\alpha$  tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica  $g : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  è un’applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori  $\pm 1$  (una volta) e  $\mp 1$  (tre volte),  $\partial_0$  è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e  $T_P M$  è lo spazio vettoriale che all’evento  $P$  è tangente all’universo  $M$ )

## Parametro affine

- parametro ‘inerziale,’ che non ‘accelera’ lungo la linea d’universo
- dà il comportamento (‘proprio’) di un orologio ‘corretto’ a meno di una trasformazione lineare o ‘affine’  $\alpha s + \beta$ , dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono delle costanti che determinano rispettivamente l’unità di tempo e lo zero
- $\alpha$  tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica  $g : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$  è un’applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori  $\pm 1$  (una volta) e  $\mp 1$  (tre volte),  $\partial_0$  è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e  $T_P M$  è lo spazio vettoriale che all’evento  $P$  è tangente all’universo  $M$ )

# Componenti del campo gravitazionale

- le  $\Gamma_{bc}^a$  possono essere viste come le componenti del campo gravitazionale, campo che però dipende dal sistema di coordinate e può essere ‘annullato’ all’evento  $P$  passando a coordinate  $y^a$  che a  $P$  sono ‘inerziali’
- rispetto a  $y^a$ , una geodetica  $\sigma : I \rightarrow M : s \mapsto \sigma(s)$ , anzi  $\sigma^a = y^a(\sigma)$ , soddisferà

$$0 = \frac{d^2 \sigma^a}{ds^2} \Big|_P,$$

dove  $I$  è un opportuno intervallo

# Componenti del campo gravitazionale

- le  $\Gamma_{bc}^a$  possono essere viste come le componenti del campo gravitazionale, campo che però dipende dal sistema di coordinate e può essere ‘annullato’ all’evento  $P$  passando a coordinate  $y^a$  che a  $P$  sono ‘inerziali’
- rispetto a  $y^a$ , una geodetica  $\sigma : I \rightarrow M : s \mapsto \sigma(s)$ , anzi  $\sigma^a = y^a(\sigma)$ , soddisferà

$$0 = \frac{d^2 \sigma^a}{ds^2} \Big|_P,$$

dove  $I$  è un opportuno intervallo

# Struttura affine e curvatura

- la connessione dà anche il tensore di Riemann

$$R_{bcd}^a = 2\Gamma_{b[d,c]}^a + \sum_m (\Gamma_{mc}^a \Gamma_{bd}^m - \Gamma_{md}^a \Gamma_{bc}^m),$$

misura di curvatura, dove

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$$

e la virgola indica la derivata parziale:

$$A_{a,b} = \frac{\partial A_a}{\partial x^b} = \partial_b A_a$$

(che non essendo covariante dipende dal sistema di coordinate, anzi dalle altre tre coordinate  $c \neq b$ )

# Espressione geometrica del ‘differenziale’ covariante

- in linguaggio più geometrico la struttura affine, la connessione, viene determinata dalla derivata covariante

$$\nabla : \mathcal{T}_n^m M \rightarrow \mathcal{T}_{n+1}^m M,$$

che aumenta di uno il grado di ‘covarianza’ dell’argomento (lasciando invece invariata la ‘contravarianza’), dove  $\mathcal{T}_n^m M$  è il modulo di campi tensoriali  $m$  volte contravarianti ed  $n$  volte covarianti su  $M$

- l’operatore lineare (nonché leibniziano)  $\nabla$  può essere visto come una specie di ‘differenziale’ covariante, poiché applicato a una funzione  $f \in \mathcal{T}_0^0 M$  dà proprio il differenziale

$$\nabla f = df \in \mathcal{T}_1^0 M$$

# Espressione geometrica del ‘differenziale’ covariante

- in linguaggio più geometrico la struttura affine, la connessione, viene determinata dalla derivata covariante

$$\nabla : \mathcal{T}_n^m M \rightarrow \mathcal{T}_{n+1}^m M,$$

che aumenta di uno il grado di ‘covarianza’ dell’argomento (lasciando invece invariata la ‘contravarianza’), dove  $\mathcal{T}_n^m M$  è il modulo di campi tensoriali  $m$  volte contravarianti ed  $n$  volte covarianti su  $M$

- l’operatore lineare (nonché leibniziano)  $\nabla$  può essere visto come una specie di ‘differenziale’ covariante, poiché applicato a una funzione  $f \in \mathcal{T}_0^0 M$  dà proprio il differenziale

$$\nabla f = df \in \mathcal{T}_1^0 M$$

# Espressione geometrica della derivata covariante direzionale

- precisando una direzione  $\dot{\gamma}$  di derivazione mediante una curva

$$\gamma : I \rightarrow M : g \mapsto \gamma(g)$$

otteniamo la ‘contrazione’ o ‘prodotto interno’ (qui scalare)

$$\langle df, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}} f = \nabla_g f = \frac{df}{dg} \in \mathcal{T}_0^0 M,$$

dove  $\langle \alpha, v \rangle$  è il valore del covettore  $\alpha$  al vettore  $v$ , e la lunghezza del vettore  $\dot{\gamma} = d\gamma/dg$  tangente di  $\gamma$  dipende linearmente dall’andamento del parametro  $g$  (e rimarrà pertanto costante lungo  $\gamma$  se  $g$  è affine, per esempio se dà l’ora di un orologio corretto)

- in generale la derivata covariante direzionale non cambia la valenza del suo argomento:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} : \mathcal{T}_n^m M \rightarrow \mathcal{T}_n^m M$$

# Espressione geometrica della derivata covariante direzionale

- precisando una direzione  $\dot{\gamma}$  di derivazione mediante una curva

$$\gamma : I \rightarrow M : g \mapsto \gamma(g)$$

otteniamo la ‘contrazione’ o ‘prodotto interno’ (qui scalare)

$$\langle df, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}} f = \nabla_g f = \frac{df}{dg} \in \mathcal{T}_0^0 M,$$

dove  $\langle \alpha, v \rangle$  è il valore del covettore  $\alpha$  al vettore  $v$ , e la lunghezza del vettore  $\dot{\gamma} = d\gamma/dg$  tangente di  $\gamma$  dipende linearmente dall’andamento del parametro  $g$  (e rimarrà pertanto costante lungo  $\gamma$  se  $g$  è affine, per esempio se dà l’ora di un orologio corretto)

- in generale la derivata covariante direzionale non cambia la valenza del suo argomento:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} : \mathcal{T}_n^m M \rightarrow \mathcal{T}_n^m M$$

# Sviluppo rispetto a una base

- scegliendo un sistema di coordinate e pertanto una base  $\partial_a$  abbiamo

$$\nabla_{\partial_a} \partial_b = \sum_c \Gamma_{ab}^c \partial_c$$

- oppure

$$dx^c(\nabla_{\partial_a} \partial_b) = \Gamma_{ab}^c$$

# Sviluppo rispetto a una base

- scegliendo un sistema di coordinate e pertanto una base  $\partial_a$  abbiamo

$$\nabla_{\partial_a} \partial_b = \sum_c \Gamma_{ab}^c \partial_c$$

- oppure

$$dx^c(\nabla_{\partial_a} \partial_b) = \Gamma_{ab}^c$$

# Equazione geometrica delle geodetiche

- una vera geodetica  $\sigma$ , con parametro  $s$  affine, soddisferà la ‘*lex prima*’

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathbf{0} = \mathbf{0}^1 \in \mathcal{T}_0^1 M$$

- una geodetica ‘riparametrizzata’  $\tau$  (linea d’universo che presenta accelerazioni soltanto tangenziali) dovrà solo soddisfare la condizione più debole

$$\lambda \dot{\tau} = \nabla_{\dot{\tau}} \dot{\tau},$$

dove lo scalare  $\lambda$  varia lungo  $\tau$  a seconda dell’‘accelerazione’ del parametro  $t$  di  $\tau$  rispetto al parametro (affine)  $s$  della vera geodetica  $\sigma$

# Equazione geometrica delle geodetiche

- una vera geodetica  $\sigma$ , con parametro  $s$  affine, soddisferà la ‘*lex prima*’

$$\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathbf{0} = \mathbf{0}^1 \in \mathcal{T}_0^1 M$$

- una geodetica ‘riparametrizzata’  $\tau$  (linea d’universo che presenta accelerazioni soltanto tangenziali) dovrà solo soddisfare la condizione più debole

$$\lambda \dot{\tau} = \nabla_{\dot{\tau}} \dot{\tau},$$

dove lo scalare  $\lambda$  varia lungo  $\tau$  a seconda dell’‘accelerazione’ del parametro  $t$  di  $\tau$  rispetto al parametro (affine)  $s$  della vera geodetica  $\sigma$

# Derivata tensoriale

- una derivata lungo una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  di un campo tensoriale  $A$  al punto  $\gamma(0)$  sarà un qualche limite

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{1}{g} \{A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))\}$$

- tensori di pari valenza applicati allo stesso punto saranno anche paragonabili, ma la differenza  $A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))$  al numeratore richiede un confronto a distanza, tra i punti  $\gamma(g)$  e  $\gamma(0)$

# Derivata tensoriale

- una derivata lungo una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  di un campo tensoriale  $A$  al punto  $\gamma(0)$  sarà un qualche limite

$$\lim_{g \rightarrow 0} \frac{1}{g} \{A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))\}$$

- tensori di pari valenza applicati allo stesso punto saranno anche paragonabili, ma la differenza  $A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))$  al numeratore richiede un confronto a distanza, tra i punti  $\gamma(g)$  e  $\gamma(0)$

# Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso ‘parallela’ (piuttosto che ‘di Lie’)—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale
- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo
- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

# Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso ‘parallela’ (piuttosto che ‘di Lie’)—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale
- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo
- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

## Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso ‘parallela’ (piuttosto che ‘di Lie’)—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale
- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo
- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

# Levi-Civita (1917)

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42**, 1917, p.173

L'incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli [di Riemann] in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l'apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante. Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile [...] venne via via ampliandosi per far debito posto anche all'interpretazione geometrica. In sulle prime avevo creduto di trovarla senz'altro nei lavori originali di Riemann [...]; ma ce n'è appena un embrione. [...] D'altra parte non c'è traccia [...] di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallele in una varietà qualunque [...]) che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico.

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42**, 1917, p.174

[...] cercando di caratterizzare il parallelismo di due direzioni  $(\alpha)$ ,  $(\alpha')$  uscenti da due punti vicinissimi  $P$  e  $P'$ . All'uopo si ricorda che qualunque varietà  $V_n$  si può riguardare immersa in uno spazio euclideo  $S_n$  a un numero abbastanza elevato  $N$  di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da  $P$  una generica direzione  $(f)$  di  $S_n$ , il parallelismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\widehat{\text{angolo}}(f)(\alpha) = \widehat{\text{angolo}}(f)(\alpha'),$$

per qualunque  $(f)$ . Orbene, il parallelismo in  $V_n$  si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta **per tutte le  $(f)$  appartenenti a  $V_n$**  (ossia alla giacitura di  $S_N$  tangente in  $P$  a  $V_n$ ).

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42**, 1917, p.174

[seguito] A giustificazione di tale definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento per le  $V_n$  euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perché in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di  $V_n$ , e non anche dall'ausiliario spazio ambiente  $S_N$ . Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallelismo si concreta come segue: Riferita la  $V_n$  a coordinate generali  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), siano  $dx_i$  gli incrementi corrispondenti al passaggio da  $P$  a  $P'$ ;  $\xi^{(i)}$  i parametri spettanti a una generica direzione ( $\alpha$ ) uscente da  $P$ ;  $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$  quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina ( $\alpha'$ ), spiccata da  $P'$ . La condizione di parallelismo è espressa dalle  $n$  equazioni

$$(1) \quad d\xi^{(i)} + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\} dx_j \xi^{(l)} = 0$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), designando  $\left\{ \begin{matrix} j l \\ i \end{matrix} \right\}$  i noti simboli di Christoffel.

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42**, 1917, p.174

[seguito] Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz'altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallele lungo una qualsiasi curva  $C$ . Se  $x_i = x_i(s)$  ne costituiscono le equazioni parametriche, basta evidentemente risguardare, nelle (1), le  $x_i$  e subordinatamente le  $\left\{ \begin{smallmatrix} jl \\ i \end{smallmatrix} \right\}$  come funzioni assegnate, le  $\xi^{(i)}$  come funzioni da determinarsi del parametro  $s$ , e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} jl \\ i \end{smallmatrix} \right\} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), riducibile ad una forma tipica [...].

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”

*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* **42**, 1917, p.175

[...] Ecco qualche conseguenza geometrica.

1° La direzione parallela in un punto generico  $P$  ad una direzione  $(\alpha)$  uscente da un altro punto qualsiasi  $P_0$  dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da  $P_0$  a  $P$ . L'indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

# Olonomia

- oggi parleremmo di olonomia, dicendo che il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio riemanniano  $n$ -dimensionale può essere  $SO(n)$  (o addirittura  $O(n)$  se lo spazio non è orientabile)
- il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio lorentziano potrà invece essere il gruppo di Lorentz ‘proprio’  $L^+$  (o addirittura il gruppo intero  $L$  se lo spazio non è orientabile)

# Olonomia

- oggi parleremmo di olonomia, dicendo che il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio riemanniano  $n$ -dimensionale può essere  $SO(n)$  (o addirittura  $O(n)$  se lo spazio non è orientabile)
- il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio lorentziano potrà invece essere il gruppo di Lorentz ‘proprio’  $L^+$  (o addirittura il gruppo intero  $L$  se lo spazio non è orientabile)

# Weyl (1918-)

# Unificazione fortuita

- è stato sostenuto da Vizgin e altri che l'unificazione di gravità ed elettromagnetismo raggiunta nella teoria di Weyl fosse **voluta**
- da una lettera che Weyl scrisse ad Einstein il 10 dicembre 1918 risulta però che non lo fosse:

Übrigens müssen Sie nicht glauben, daß ich von der Physik her dazu gekommen bin, neben der quadratische noch die lineare Differentialform in die Geometrie einzuführen; sondern ich wollte wirklich diese “Inkonsequenz,” die mir schon immer ein Dorn im Auge gewesen war, endlich einmal beseitigen und bemerkte dann zu meinem eigenen Erstaunen: das sieht so aus, als erklärt es die Elektrizität.

## “Gravitation und Elektrizität”

*Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465*

Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die überraschenderweise, auf die Welt angewendet, **nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt.**

Weyl (1918-)

I due pregiudizi

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interessarono **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'esito che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'esito che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# 1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estensione di tale carattere alla lunghezza

# Allargamento del gruppo di ologonomia

- insomma Weyl voleva allargare il gruppo di ologonomia
  - ad  $e^\lambda \oplus SO(n)$   
(da  $SO(n)$ : spazio riemanniano  $n$ -dimensionale orientabile)
  - ad  $e^\lambda \oplus L^+$   
(da  $L^+$ : spazio lorentziano orientabile)

dove il gruppo  $e^\lambda$  delle dilatazioni agisce solo sulla lunghezza del vettore

# “Gravitation und Elektrizität”

*Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918*

Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen: 1. sie müssen **invariant** sein **gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen** [che riguardano direttamente le direzioni, e più indirettamente le lunghezze], 2. sie müssen ungeändert bleiben, **wenn man die  $g_{ik}$  durch  $\lambda g_{ik}$  ersetzt**, wo  $\lambda$  eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist.

- già una specie di *par condicio* imposta a direzione e lunghezza

# “Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie

*Annalen der Physik* **59**, 1919, p.101

**Einleitung.** Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf **Koordinaten** bezogen sein und müssen 2. gewisse **Maßeinheiten** festgelegt werden. Die bisherige **E i n s t e i n**sche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheit, zu gewinnen.

# “Reine Infinitesimalgeometrie”

*Mathematische Zeitschrift* 2, 1918, p.401

Zu jedem Punkt  $P$  gibt es geodätische Bezugssysteme [ossia sistemi ‘inerziali’ che annullano  $\Gamma_{bc}^a$ ]. Ist  $\xi$  ein gegebener Vektor in  $P$ ,  $P'$  aber ein zu  $P$  unendlich benachbarter Punkt, so verstehen wir unter dem aus  $\xi$  durch Parallelverschiebung nach  $P'$  entstehenden Vektor denjenigen Vektor in  $P'$ , der in dem zu  $P$  gehörigen geodätischen Bezugssystem dieselben Komponenten wie  $\xi$  besitzt.

- quindi un trasporto sarà parallelo se, rispetto a coordinate geodetiche, non cambia le componenti del vettore trasportato
- vedremo che anche la caratterizzazione del trasporto **congruente** si riferirà al calibro ‘geodetico,’ che lascia invariata la lunghezza

# Analogia

## DIREZIONE

coordinate

trasporto parallelo

gravitazione

connessione di Levi-Civita  $\Gamma_{bc}^a$

curvatura  $R_{bcd}^a$  (di  $\Gamma_{bc}^a$ )

coordinate geodetiche  $y^a$  (a  $P$ ):  $\Gamma_{bc}^a = 0$

princ. d'equival.:  $\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \rightarrow \ddot{y}^a$

## LUNGHEZZA

calibro

trasporto congruente

elettromagnetismo

connessione di lunghezza  $A$

curvatura di lunghezza  $F = dA$

calibro geodetico (a  $P$ )  $A' = A + d\lambda = 0$

princ. d'equival.:  $dl = -lA \rightarrow dl' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

# Analogia

## DIREZIONE

coordinate

trasporto parallelo

gravitazione

connessione di Levi-Civita  $\Gamma_{bc}^a$

curvatura  $R_{bcd}^a$  (di  $\Gamma_{bc}^a$ )

coordinate geodetiche  $y^a$  (a  $P$ ):  $\Gamma_{bc}^a = 0$

princ. d'equival.:  $\ddot{x}^a + \Gamma_{bc}^a \dot{x}^b \dot{x}^c \rightarrow \ddot{y}^a$

## LUNGHEZZA

calibro

trasporto congruente

elettromagnetismo

connessione di lunghezza  $A$

curvatura di lunghezza  $F = dA$

calibro geodetico (a  $P$ )  $A' = A + d\lambda = 0$

princ. d'equival.:  $dl = -lA \rightarrow dl' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

## 2. Scetticismo relativo ai confronti a distanza

- pregiudizio sottolineato da Ryckman, che sembra reputarlo effettivo nel contesto della scoperta
- espresso nei due brani che seguono

## 2. Scetticismo relativo ai confronti a distanza

- pregiudizio sottolineato da Ryckman, che sembra reputarlo effettivo nel contesto della scoperta
- espresso nei due brani che seguono

# “Geometrie und Physik”

*Die Naturwissenschaften* **19**, 1931, p.52

Die Philosophen mögen recht haben, daß unser Anschauungsraum, gleichgültig, was die physikalische Erfahrung sagt, euklidische Struktur trägt. Nur bestehe ich allerdings dann darauf, daß zu diesem Anschauungsraum das Ich-Zentrum gehört und daß die Koinzidenz, die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ich-Zentrum entfernt. In der theoretischen Konstruktion spiegelt sich das wider in dem Verhältnis zwischen der krummen Fläche und ihrer Tangentenebene im Punkte  $P$ : beide decken sich in der unmittelbaren Umgebung des Zentrums  $P$ , aber je weiter man sich von  $P$  entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Fläche und Ebene.

Erkennt man neben dem physischen einen **Anschauungsraum** an und behauptet von ihm, daß seine Maßstruktur aus Wesensgründen die euklidischen Gesetze erfülle, so steht dies mit der Physik nicht in Widerspruch, sofern sie an der euklidischen Beschaffenheit der **unendlich kleinen Umgebung** eines punktes  $O$  (in dem sich das Ich momentan befindet) festhält [...]. Aber man muß dann zugeben, daß die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ichzentrum entfernt. Er ist einer Tangentenebene zu vergleichen, die im Punkte  $O$  an eine krumme Fläche, den physischen Raum, gelegt ist: in der unmittelbaren Umgebung von  $O$  decken sich beide, aber je weiter man sich von  $O$  entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Ebene und Fläche.

# Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche
- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente
- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

# Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche
- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente
- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

# Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche
- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente
- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

# *Evidenz*

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro
- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di  $P$
- l'integrabilità andava pertanto abbandonata ...

# *Evidenz*

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro
- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di  $P$
- l'integrabilità andava pertanto abbandonata ...

# *Evidenz*

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro
- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di  $P$
- l'integrabilità andava pertanto abbandonata ...

# Ragionamento successivo alla derivazione della teoria?

- la vicenda testuale di *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* è complessa, ma l'articolo originario uscito con lo stesso titolo nel *Handbuch der Philosophie* risale al 1928
- espressioni di tale scetticismo (diciamo 'articolato,' esplicito) precedenti al 1928 non sono a mia conoscenza

## Ragionamento successivo alla derivazione della teoria?

- la vicenda testuale di *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* è complessa, ma l'articolo originario uscito con lo stesso titolo nel *Handbuch der Philosophie* risale al 1928
- espressioni di tale scetticismo (diciamo 'articolato,' esplicito) precedenti al 1928 non sono a mia conoscenza

## “Gravitation und Elektrizität”

*Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465*

**Eine wahrhafte Nahe-Geometrie darf jedoch nur ein Prinzip der Übertragung einer Länge von einem Punkt zu einem unendlich benachbarten kennen, und es ist dann von vornherein ebensowenig anzunehmen, daß das Problem der Längenübertragung von einem Punkte zu einem endlich entfernten integrabel ist, wie sich das Problem der Richtungsübertragung als integrabel herausgestellt hat.**

risale al 1918, ma sembra più una pretesa di equo trattamento di direzione e lunghezza che non espressione dello scetticismo di cui nei brani proiettati dianzi

# “Reine Infinitesimalgeometrie”

*Mathematische Zeitschrift* 2, 1918, p.385

Indem ich die R i e m a n n sche Geometrie, die doch reine “Nahe-Geometrie” sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreie, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit her noch bei sich führte [...].

In dieser Note möchte ich jene **reine Infinitesimalgeometrie** entwickeln, die nach meiner Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift.

(scritto dopo “Gravitation und Elektrizität”; il 18 settembre stava per uscire—“bald erscheint”)

# Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi
- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione
- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:  
**le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure devono avere distribuzioni gaussiane)**  
pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale
- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

# Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi
- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione
- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:  
**le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure devono avere distribuzioni gaussiane)**  
pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale
- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

# Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi
- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione
- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:  
**le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure devono avere distribuzioni gaussiane)**  
pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale
- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

# Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi
- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione
- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:  
**le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure devono avere distribuzioni gaussiane)**  
pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale
- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

# Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti
- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza
- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

# Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti
- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza
- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

# Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti
- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza
- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

# Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti
- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza
- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

# Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti
- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza
- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

# “Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie

*Annalen der Physik* **59**, 1919, p.102

Wie man sieht, entspricht dieser Standpunkt gegenüber der Frage der Maßeinheit genau demjenigen, welchen die spezielle Relativitätstheorie hinsichtlich des Achsenkreuzes einnimmt. Die allgemeine Relativitätstheorie wird statt dessen nur postulieren, daß  $\alpha$  von der Strecke unabhängig ist, nicht aber vom Orte; sie muß die ohnehin in einer reinen “Nahegeometrie” unzuläßige Annahme der Möglichkeit des “Fernvergleichs” fallen lassen: nur Strecken, die sich an der gleichen Stelle befinden, lassen sich aneinander messen.

- priorità del primo pregiudizio è piuttosto chiara
- programma infinitesimale rimane vago, senza esplicita articolazione, né fondamento metafisico o epistemologico o husserliano

Weyl (1918-)

La teoria elettrogravitazionale

*Raum, Zeit, Materie*  
Berlino, Springer, 1923, p.122

Ein Punkt  $P$  hängt also mit seiner Umgebung  $[U]$  metrisch zusammen, wenn von jeder Strecke in  $P$  feststeht, welche Strecke aus ihr durch kongruente Verpflanzung von  $P$  nach dem beliebigen zu  $P$  unendlich benachbarten Punkte  $P'$  hervorgeht. Die einzige Forderung, welche wir an diesen Begriff stellen (zugleich die weitgehendste, die überhaupt möglich ist), ist diese: Die Umgebung von  $P$  läßt sich so eichen, daß die Maßzahl [lunghezza quadra] einer jeden Strecke in  $P$  durch kongruente Verpflanzung nach den unendlich benachbarten Punkten keine Änderung erleidet. Die Eichung heißt dann geodätisch in  $P$ . — Ist aber die Mannigfaltigkeit irgendwie geeicht, ist ferner  $l$  die Maßzahl einer beliebigen Strecke in punkte  $P$ ,  $l + dl$  [ $l + \delta l$ ] die Maßzahl der aus ihr durch kongruente Verpflanzung nach dem unendlich nahen Punkte  $P'$  entstehenden Strecke in  $P'$ , so gilt notwendig die Gleichung

$$dl = -ld\varphi,$$

wo der infinitesimale Faktor  $d\varphi$  [=  $A$ ] von der verpflanzten Strecke unabhängig ist; denn jene Verpflanzung bewirkt eine ähnliche Abbildung der Strecken in  $P$  auf die Strecken in  $P'$ .

*Raum, Zeit, Materie*  
Berlino, Springer, 1923, p.122

[...] Wird die Eichung gemäß der Formel  $\bar{l} = \lambda l$  in  $P$  und den Punkten seiner Umgebung abgeändert (das Eichverhältnis  $\lambda$  ist eine positive Ortsfunktion), so kommt statt dessen

$$d\bar{l} = -\bar{l}d\bar{\varphi}, \quad d\bar{\varphi} = d\varphi - \frac{d\lambda}{\lambda}$$

ist. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß sich  $d\bar{\varphi}$ , durch geeignete Wahl von  $\lambda$ , im Punkte  $P$  identisch mit Bezug auf die infinitesimale Verschiebung  $\overrightarrow{PP'} = (dx_i)$  zu Null machen läßt, ist offenbar die, daß  $d\varphi$  eine lineare Differentialform ist:

$$d\varphi = \varphi_i(dx)^i.$$

- ma bisogna capire cosa intenda per *eine lineare Differentialform*—e quindi che tipo di oggetto sia  $dl$

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l (= \|dl\|)$
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- $dl$  è una **1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l (= \|dl\|)$
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- $dl$  è una **1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l$  ( $= \|dl\|$ )
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- $dl$  è una **1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l (= \|dl\|)$
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- $dl$  è una **1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l$  ( $= \|dl\|$ )
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l (= \|dl\|)$
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l$  ( $= \|dl\|$ )
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l$  ( $= \|dl\|$ )
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l (= \|dl\|)$
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Esegesi

- è chiaramente sbagliato identificare  $dl$  con lo scalare  $\delta l$  ( $= \|dl\|$ )
- sarà un covettore (o campo di covettori) di qualche genere
- le esigenze dell'analisi impongono una 1-forma almeno chiusa
- pretendere inoltre l'esattezza sarebbe eccessivo (dando l'integrabilità, che va evitata)
- **$dl$  è una 1-forma chiusa ma non esatta** sembra una ragionevole via di mezzo tra il mero covettore e il differenziale di una funzione
- quindi anche  $-lA$  e  $A$  saranno 1-forme chiuse
- sappiamo inoltre che  $-lA$  può essere annullato da un'opportuna *Eichung*
- essendo  $l$  arbitraria, sarà in particolare  $A$  a essere cancellabile in questo modo
- la ricalibrazione viene effettuata tramite il differenziale  $d\lambda$  (Weyl scrive  $d\lambda/\lambda$ ) di una *Ortsfunktion*  $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$
- in una piccola  $U$ , tale condizione determina solo una 1-forma  $A$  chiusa (confermando il sospetto che  $dl$  fosse una 1-forma chiusa)

# Notazione

- sarebbe stato più chiaro, cioè più consono alle nostre attuali usanze, se avesse scritto

$$\varphi = \varphi_i dx^i$$

e non

$$d\varphi = \varphi_i dx^i$$

- la  $d$  di  $d\varphi$  aveva presumibilmente una valenza **locale**—indicando il carattere **chiuso** (e non necessariamente esatto)—ma oggi tenderemmo ad attribuirle un significato globale

# Notazione

- sarebbe stato più chiaro, cioè più consono alle nostre attuali usanze, se avesse scritto

$$\varphi = \varphi_i dx^i$$

e non

$$d\varphi = \varphi_i dx^i$$

- la  $d$  di  $d\varphi$  aveva presumibilmente una valenza **locale**—indicando il carattere **chiuso** (e non necessariamente esatto)—ma oggi tenderemmo ad attribuirle un significato globale

# Integrazione

- una 1-forma esatta  $A = d\lambda$  darebbe il fattore

$$e^{\int_{\gamma} d\lambda} = e^{\int d\lambda} = e^{\Delta\lambda}$$

indipendente dal percorso  $\gamma$

- ossia

$$\|V'\| = e^{\Delta\lambda} \|V\|,$$

dove  $V'$  è il vettore ‘trasportato’

# Integrazione

- una 1-forma esatta  $A = d\lambda$  darebbe il fattore

$$e^{\int_{\gamma} d\lambda} = e^{\int d\lambda} = e^{\Delta\lambda}$$

indipendente dal percorso  $\gamma$

- ossia

$$\|V'\| = e^{\Delta\lambda} \|V\|,$$

dove  $V'$  è il vettore ‘trasportato’

# 1-forma non esatta

- quindi una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base
- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione
- serviva pertanto una 1-forma  $A$  con quadrirotore  $F = dA$  non nullo
- e vedendo  $F = dA$  Weyl non poteva non pensare alla 2-forma  $F$  di Faraday, quadrirotore del quadripotenziale elettromagnetico  $A$
- del resto  $dF = 0$ , che segue da  $F = dA$ , incorpora già le due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

# 1-forma non esatta

- quindi una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base
- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione
- serviva pertanto una 1-forma  $A$  con quadrirotore  $F = dA$  non nullo
- e vedendo  $F = dA$  Weyl non poteva non pensare alla 2-forma  $F$  di Faraday, quadrirotore del quadripotenziale elettromagnetico  $A$
- del resto  $dF = 0$ , che segue da  $F = dA$ , incorpora già le due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

# 1-forma non esatta

- quindi una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base
- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione
- serviva pertanto una 1-forma  $A$  con quadrirotore  $F = dA$  non nullo
- e vedendo  $F = dA$  Weyl non poteva non pensare alla 2-forma  $F$  di Faraday, quadrirotore del quadripotenziale elettromagnetico  $A$
- del resto  $dF = 0$ , che segue da  $F = dA$ , incorpora già le due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

# 1-forma non esatta

- quindi una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base
- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione
- serviva pertanto una 1-forma  $A$  con quadrirotore  $F = dA$  non nullo
- e vedendo  $F = dA$  Weyl non poteva non pensare alla 2-forma  $F$  di Faraday, quadrirotore del quadripotenziale elettromagnetico  $A$
- del resto  $dF = 0$ , che segue da  $F = dA$ , incorpora già le due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

# 1-forma non esatta

- quindi una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base
- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione
- serviva pertanto una 1-forma  $A$  con quadrirotore  $F = dA$  non nullo
- e vedendo  $F = dA$  Weyl non poteva non pensare alla 2-forma  $F$  di Faraday, quadrirotore del quadripotenziale elettromagnetico  $A$
- del resto  $dF = 0$ , che segue da  $F = dA$ , incorpora già le due equazioni di Maxwell omogenee:

$$\operatorname{div} B = 0 \quad \operatorname{rot} E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0$$

## In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $A_a = A(\partial_a)$ , le  $E_x, E_y, E_z$  sono le componenti del campo elettrico e le  $B_x, B_y, B_z$  quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

## In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

dove  $A_a = A(\partial_a)$ , le  $E_x, E_y, E_z$  sono le componenti del campo elettrico e le  $B_x, B_y, B_z$  quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab} dx^a \wedge dx^b$$

“Reine Infinitesimalgeometrie”  
*Mathematische Zeitschrift* 2, 1918, p.385

Nach dieser Theorie ist **alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik**; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. [...] <sup>1</sup>

⋮

1. Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

# Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

# Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

# Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

# Libertà di calibro

- visto che conta il quadrirotore  $F = dA$ , siamo liberi di aggiungere ad  $A$  il differenziale  $d\mu$  di una funzione  $\mu$
- trasformando il quadripotenziale secondo

$$A \rightarrow A' = A + d\mu,$$

il quadrirotore

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

rimane invariato

# Libertà di calibro

- visto che conta il quadrirotore  $F = dA$ , siamo liberi di aggiungere ad  $A$  il differenziale  $d\mu$  di una funzione  $\mu$
- trasformando il quadripotenziale secondo

$$A \rightarrow A' = A + d\mu,$$

il quadrirotore

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

rimane invariato

# Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale  $d\mu$ , la lunghezza ne esce cambiata
- trasportando il vettore  $X_0$  dal punto  $P_0$  con valore  $\mu_0 = \mu(P_0)$  al punto  $P_1$  con valore  $\mu_1 = \mu(P_1)$ , la lunghezza quadra finale  $g_1(X_1, X_1)$  acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile)  $e^{\Delta\mu}$ , dove  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$
- questo perché la funzione  $\mu$  cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_{\sigma} A} \mapsto e^{\int_{\sigma} A'} = e^{\int_{\sigma} (A+d\mu)} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_{\sigma} A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_{\sigma} A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_{\sigma} A'} g_0(X_0, X_0)$$

## Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale  $d\mu$ , la lunghezza ne esce cambiata
- trasportando il vettore  $X_0$  dal punto  $P_0$  con valore  $\mu_0 = \mu(P_0)$  al punto  $P_1$  con valore  $\mu_1 = \mu(P_1)$ , la lunghezza quadra finale  $g_1(X_1, X_1)$  acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile)  $e^{\Delta\mu}$ , dove  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$
- questo perché la funzione  $\mu$  cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_{\sigma} A} \mapsto e^{\int_{\sigma} A'} = e^{\int_{\sigma} (A+d\mu)} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_{\sigma} A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_{\sigma} A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_{\sigma} A'} g_0(X_0, X_0)$$

## Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale  $d\mu$ , la lunghezza ne esce cambiata
- trasportando il vettore  $X_0$  dal punto  $P_0$  con valore  $\mu_0 = \mu(P_0)$  al punto  $P_1$  con valore  $\mu_1 = \mu(P_1)$ , la lunghezza quadra finale  $g_1(X_1, X_1)$  acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile)  $e^{\Delta\mu}$ , dove  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$
- questo perché la funzione  $\mu$  cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_{\sigma} A} \mapsto e^{\int_{\sigma} A'} = e^{\int_{\sigma} (A+d\mu)} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_{\sigma} A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_{\sigma} A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_{\sigma} A'} g_0(X_0, X_0)$$

## Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale  $d\mu$ , la lunghezza ne esce cambiata
- trasportando il vettore  $X_0$  dal punto  $P_0$  con valore  $\mu_0 = \mu(P_0)$  al punto  $P_1$  con valore  $\mu_1 = \mu(P_1)$ , la lunghezza quadra finale  $g_1(X_1, X_1)$  acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile)  $e^{\Delta\mu}$ , dove  $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$
- questo perché la funzione  $\mu$  cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_{\sigma} A} \mapsto e^{\int_{\sigma} A'} = e^{\int_{\sigma} (A+d\mu)} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_{\sigma} A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_{\sigma} A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_{\sigma} A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_{\sigma} A'} g_0(X_0, X_0)$$

# Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme  $e^\mu$ :

$$g \rightarrow g' = e^\mu g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g'_1(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g'_0(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

# Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme  $e^\mu$ :

$$g \rightarrow g' = e^\mu g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g'_1(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g'_0(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

# Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme  $e^\mu$ :

$$g \rightarrow g' = e^\mu g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g'_1(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g'_0(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

## Connessione 'metrica'

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**
- la metrica  $g$  è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione  $\nabla$  se

$$\nabla g = \mathbf{0}_3$$

- in tal caso le linee d'universo più dritte (soddisfacenti  $\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathbf{0}^1$ ) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})} ds = \delta \int ds = 0$$

## Connessione 'metrica'

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**
- la metrica  $g$  è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione  $\nabla$  se

$$\nabla g = \mathbf{0}_3$$

- in tal caso le linee d'universo più dritte (soddisfacenti  $\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathbf{0}^1$ ) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})} ds = \delta \int ds = 0$$

## Connessione 'metrica'

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**
- la metrica  $g$  è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione  $\nabla$  se

$$\nabla g = \mathbf{0}_3$$

- in tal caso le linee d'universo più dritte (soddisfacenti  $\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = \mathbf{0}^1$ ) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})} ds = \delta \int ds = 0$$

# Compatibilità di Weyl

- la metrica ricalibrata  $e^\mu g$  soddisferà solo un'allargata compatibilità, detta 'di Weyl' ed espressa da

$$\nabla(e^\mu g) = d\mu \otimes (e^\mu g),$$

in cui vediamo giustapposte le due trasformazioni che si compensano lasciando inalterate le lunghezze

- essendo nullo il differenziale  $d\lambda = \mathbf{0}_1$  di una costante  $\lambda$ , ogni multiplo  $e^\lambda g$  costante di  $g$  sarà sempre compatibile con  $\nabla$ :

$$\nabla(e^\lambda g) = d\lambda \otimes (e^\lambda g) = \mathbf{0}_1 \otimes (e^\lambda g) = \mathbf{0}_3$$

# Compatibilità di Weyl

- la metrica ricalibrata  $e^\mu g$  soddisferà solo un'allargata compatibilità, detta 'di Weyl' ed espressa da

$$\nabla(e^\mu g) = d\mu \otimes (e^\mu g),$$

in cui vediamo giustapposte le due trasformazioni che si compensano lasciando inalterate le lunghezze

- essendo nullo il differenziale  $d\lambda = \mathbf{0}_1$  di una costante  $\lambda$ , ogni multiplo  $e^\lambda g$  costante di  $g$  sarà sempre compatibile con  $\nabla$ :

$$\nabla(e^\lambda g) = d\lambda \otimes (e^\lambda g) = \mathbf{0}_1 \otimes (e^\lambda g) = \mathbf{0}_3$$

Weyl (1918-)

Il dibattito con Einstein

# Primi scambi

- il primo marzo del diciotto Weyl scrisse ad Einstein

Dieser Tage ist es mir, wie ich glaube, gelungen, Elektrizität und Gravitation aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten.

- dopo cinque giorni Einstein rispose con entusiasmo ... lasciando però già trapelare qualche dubbio:

Ihre Abhandlung ist gekommen. Es ist ein Genie-Streich ersten Ranges. Allerdings war ich bisher nicht imstande, meinen Massstab-Einwand zu erledigen. Darüber ein andermal ausführlicher.

- la cartolina successiva continuò

Ihr Gedankengang ist von wunderbarer Geschlossenheit. [...] Abgesehen von der Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ist es jedenfalls eine grandiose Leistung des Gedankens.

## L'obiezione di Einstein

- il 15 aprile Einstein tornò, come già intimato, sulla *Massstab-Einwand* (che poi sarebbe più una *Uhr-Einwand*):

So schön Ihre Gedanke ist, muss ich doch offen sagen, dass es nach meiner Ansicht ausgeschlossen ist, dass die Theorie die Natur entspricht. Das  $ds$  selbst hat nämlich reale Bedeutung. Denken Sie sich zwei Uhren, die relativ zueinander ruhend neben einander gleich rasch gehen. Werden sie voneinander getrennt, in beliebiger Weise bewegt und dann wieder zusammen gebracht, so werden sie wieder gleich (rasch) gehen, d. h. ihr relativer Gang hängt nicht von der Vorgeschichte ab. Denke ich mir zwei Punkte  $P_1$  &  $P_2$  die durch eine Zeitartige Linie verbunden werden können. Die an  $P_1$  &  $P_2$  anliegenden zeitartigen Elemente  $ds_1$  und  $ds_2$  können dann durch mehrere zeitartigen Linien verbunden werden, auf denen sie liegen. Auf diesen laufende Uhren werden ein Verhältnis  $ds_1 : ds_2$  liefern, welches von der Wahl der verbindenden Kurven unabhängig ist.—Lässt man den Zusammenhang des  $ds$  mit Massstab- und Uhr-Messungen fallen, so verliert die Rel. Theorie überhaupt ihre empirische Basis.

# Le linee spettrali

- il 19 aprile Einstein riprese la questione, formulando la famosa obiezione delle linee spettrali:

[...] wenn die Länge eines Einheitsmassstabes (bezw. die Gang-Geschwindigkeit einer Einheitsuhr) von der Vorgeschichte abhängen. Wäre dies in der Natur wirklich so, dann könnte es nicht chemische Elemente mit Spektrallinien von bestimmter Frequenz geben, sondern es müsste die relative Frequenz zweier (räumlich benachbarter) Atome der gleichen Art im Allgemeinen verschieden sein. Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muss.

## *Einstellung e Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

## *Einstellung e Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

## *Einstellung e Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

## *Einstellung e Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

## *Einstellung e Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

# “Elektrizität und Gravitation”

*Physikalische Zeitschrift* **21**, 1920, p.650

Eine Größe in der Natur kann sich bestimmen durch Beharrung oder durch Einstellung. Beispiel: der Achse eines rotierenden Kreisels kann man eine willkürliche Anfangsrichtung erteilen, diese überträgt sich dann aber, wenn der Kegel sich selbst überlassen, durch eine von Moment zu Moment wirksame Beharrungstendenz (Parallelverschiebung); hingegen bestimmt sich die Richtung einer Magnetnadel im Magnetfeld durch Einstellung. Während affiner und metrischer Zusammenhang a priori festlegen, wie Vektoren und Strecken sich ändern, wenn sie rein der Beharrungstendenz folgen, bestimmen sich Ladung des Elektrons, Atomfrequenzen und Länge eines Maßstabs durch Einstellung.

## Einstein a Weyl, 31 maggio 1918

[...] Könnte man den Herrgott wirklich der Inkonsequenz anklagen, wenn er sich die von Ihnen gefundene Gelegenheit zum Harmonisieren der physikalischen Welt entgehen liess? Ich glaub nicht. In der Falle, dass er die Welt gemäss Ihnen gemacht hätte, wäre nämlich Weyl II. gekommen, um ihn vorwurfsvoll also anzureden:

“Lieber Gott, wenn es schon nicht in Deinem Ratschluss gelegen hat, der Kongruenz unendlich kleiner starrer Körper einen objektiven Sinn zu geben, sodass man, wenn sie voneinander entfernt sind, nicht sagen kann, sie seien kongruent oder sie seien es nicht: warum hast Du Unbegreiflicher dann es nicht verschmäht, dem Winkel diese Eigenschaft zu belassen (bzw. der Aehnlichkeit)? Wenn zwei unendlich kleine, ursprünglich zur Deckung bringbare Körper  $K$ ,  $K'$  nicht mehr zur Deckung gebracht werden können, nachdem  $K'$  eine Rundreise durch den Raum gemacht hat, warum sollte bei dieser Rundreise die **Aehnlichkeit** von  $K$  und  $K'$  gewahrt bleiben? Da erscheint es doch natürlicher, dass die Verwandlung von  $K'$  relativ zu  $K$  allgemeiner [als] eine affine sei.” Weil aber der Herrgott schon vor der Entwicklung der theoretischen Physik gemerkt hat, dass er den Meinungen der Menschen nicht gerecht werden kann, mach er es eben, wie **er** will. [...]

## Einstein a Weyl, 3 luglio 1918

[...] Jedenfalls gib es bevorzugte Weltlinien, die Wurflinien ungeladenen Körper, andererseits, auch nach Ihrer Theorie, die geodätischen Linien. Sollten diese beiden Sorten einzigartiger Weltlinien nicht identisch sein müssen? Es ist kaum zu bezweifeln. Dann wirken nach Ihrer Theorie auf ungeladene Körper Kräfte, welche den elektromagnetischen **Potentialen** proportional sind. [...]

## Elettromagnetismo e cariche

- il campo elettromagnetico  $F$  dovrebbe piegare le linee d'universo delle **cariche** secondo la '*lex secunda*'

$$\overbrace{\tilde{F}(\dot{\gamma})}^{\text{forza}} = m \cdot \overbrace{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}}^{\text{accel.}}$$

dove  $\tilde{F}(\dot{\gamma}) = qg^\sharp F^b(\dot{\gamma}) = qg^{-1}(F^b(\dot{\gamma}), \cdot)$  è la forza di Lorentz,  $q$  la carica,  $m$  la massa ed  $F^b(\dot{\gamma}) = F(\dot{\gamma}, \cdot)$

- ma nella TEG, obietta Einstein,  $F = dA$  sembra piegare le linee d'universo dei gravi neutri ( $q = 0$ ), mediante il pilotaggio affine dato dalla connessione elettromagneticamente alterata

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2}(\delta_b^a A_c + \delta_c^a A_b - g_{bc} A^a),$$

dove  $A^a = g^{ab} \partial_b(A)$  e  $g^{ab} = g^{-1}(dx^a, dx^b)$

## Elettromagnetismo e cariche

- il campo elettromagnetico  $F$  dovrebbe piegare le linee d'universo delle **cariche** secondo la '*lex secunda*'

$$\overbrace{\tilde{F}(\dot{\gamma})}^{\text{forza}} = m \cdot \overbrace{\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}}^{\text{accel.}}$$

dove  $\tilde{F}(\dot{\gamma}) = qg^\sharp F^b(\dot{\gamma}) = qg^{-1}(F^b(\dot{\gamma}), \cdot)$  è la forza di Lorentz,  $q$  la carica,  $m$  la massa ed  $F^b(\dot{\gamma}) = F(\dot{\gamma}, \cdot)$

- ma nella TEG, obietta Einstein,  $F = dA$  sembra piegare le linee d'universo dei gravi neutri ( $q = 0$ ), mediante il pilotaggio affine dato dalla connessione elettromagneticamente alterata

$$\bar{\Gamma}_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2}(\delta_b^a A_c + \delta_c^a A_b - g_{bc} A^a),$$

dove  $A^a = g^{ab} \partial_b(A)$  e  $g^{ab} = g^{-1}(dx^a, dx^b)$

Weyl (1918-)

Il metodo causale-inerziale

## Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all'ontologia di base della relatività generale

## Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all'ontologia di base della relatività generale

## Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all'ontologia di base della relatività generale

# Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

# Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

# Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

# Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

## Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi e non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva
- le tangenti  $\dot{\sigma}$  delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot{\sigma})\| = dt(\dot{\sigma}) > \|P_t^\perp(\dot{\sigma})\|$$

(dove il proiettore  $P_t = \partial_t dt(\cdot)$ ; le lunghezze  $\|\cdot\|$  sono euclidee e l'ortogonalità  $\perp$ , benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti  $\dot{\tau}$  delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot{\tau}, \dot{\tau}) = 0$$

(caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

## Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi e non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva
- le tangenti  $\dot{\sigma}$  delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot{\sigma})\| = dt(\dot{\sigma}) > \|P_t^\perp(\dot{\sigma})\|$$

(dove il proiettore  $P_t = \partial_t dt(\cdot)$ ; le lunghezze  $\|\cdot\|$  sono euclidee e l'ortogonalità  $\perp$ , benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti  $\dot{\tau}$  delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot{\tau}, \dot{\tau}) = 0$$

(caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

## Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi** e **non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva
- le tangenti  $\dot{\sigma}$  delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot{\sigma})\| = dt(\dot{\sigma}) > \|P_t^\perp(\dot{\sigma})\|$$

(dove il proiettore  $P_t = \partial_t dt(\cdot)$ ; le lunghezze  $\|\cdot\|$  sono euclidee e l'ortogonalità  $\perp$ , benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti  $\dot{\tau}$  delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot{\tau}, \dot{\tau}) = 0$$

(caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

## Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**
- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche
- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variabile)

## Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**
- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche
- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variabile)

## Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**
- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche
- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variabile)

# Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- danno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$(2) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \sum_d \left\{ \frac{\delta_b^a}{(n+1)} \Gamma_{dc}^d - \frac{\delta_c^a}{(n+1)} \Gamma_{db}^d \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

# Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- danno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$(2) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \sum_d \left\{ \frac{\delta_b^a}{(n+1)} \Gamma_{dc}^d - \frac{\delta_c^a}{(n+1)} \Gamma_{db}^d \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

# Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- danno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$(2) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \sum_d \left\{ \frac{\delta_b^a}{(n+1)} \Gamma_{dc}^d - \frac{\delta_c^a}{(n+1)} \Gamma_{db}^d \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

# Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- danno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$(2) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \sum_d \left\{ \frac{\delta_b^a}{(n+1)} \Gamma_{dc}^d - \frac{\delta_c^a}{(n+1)} \Gamma_{db}^d \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

# Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- danno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$(2) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi_{bc}^a = \Gamma_{bc}^a - \sum_d \left\{ \frac{\delta_b^a}{(n+1)} \Gamma_{dc}^d - \frac{\delta_c^a}{(n+1)} \Gamma_{db}^d \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

# Struttura conforme

- la luce dà invece la struttura conforme, che determina la metrica a meno di un fattore conforme  $e^\lambda$
- siccome la metrica determina una connessione affine (simmetrica, ‘di Levi-Civita’), la luce dà la struttura affine a meno di un termine

$$(3) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a),$$

che rappresenta la differenza tra due connessioni conformemente equivalenti

## Struttura conforme

- la luce dà invece la struttura conforme, che determina la metrica a meno di un fattore conforme  $e^\lambda$
- siccome la metrica determina una connessione affine (simmetrica, ‘di Levi-Civita’), la luce dà la struttura affine a meno di un termine

$$(3) \quad [\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a),$$

che rappresenta la differenza tra due connessioni conformemente equivalenti

## Conto

- la metrica  $g_{ir}$  determina la connessione (simmetrica)  $\Gamma_{jk}^i$  mediante

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_r g^{ir} (g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r})$$

- ricalibrando secondo  $g_{ir} \mapsto \bar{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$  (e quindi  $g^{ir} \mapsto \bar{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$ ) otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k (e^\lambda g_{rj}) + \partial_j (e^\lambda g_{rk}) - \partial_r (e^\lambda g_{jk}) \} \\ &= \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{2} \left( \delta_j^i \partial_k \lambda + \delta_k^i \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right) \end{aligned}$$

- le  $\varphi_k = \partial_k \lambda$  saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle  $\varphi_k$  **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

## Conto

- la metrica  $g_{ir}$  determina la connessione (simmetrica)  $\Gamma_{jk}^i$  mediante

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_r g^{ir} (g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r})$$

- ricalibrando secondo  $g_{ir} \mapsto \bar{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$  (e quindi  $g^{ir} \mapsto \bar{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$ ) otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k (e^\lambda g_{rj}) + \partial_j (e^\lambda g_{rk}) - \partial_r (e^\lambda g_{jk}) \} \\ &= \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{2} \left( \delta_j^i \partial_k \lambda + \delta_k^i \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right) \end{aligned}$$

- le  $\varphi_k = \partial_k \lambda$  saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle  $\varphi_k$  **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

## Conto

- la metrica  $g_{ir}$  determina la connessione (simmetrica)  $\Gamma_{jk}^i$  mediante

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} \sum_r g^{ir} (g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r})$$

- ricalibrando secondo  $g_{ir} \mapsto \bar{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$  (e quindi  $g^{ir} \mapsto \bar{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$ ) otteniamo

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k (e^\lambda g_{rj}) + \partial_j (e^\lambda g_{rk}) - \partial_r (e^\lambda g_{jk}) \} \\ &= \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{2} \left( \delta_j^i \partial_k \lambda + \delta_k^i \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right) \end{aligned}$$

- le  $\varphi_k = \partial_k \lambda$  saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle  $\varphi_k$  **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

## Conto ( $\lambda$ )

- ricalibrando secondo  $g_{ir} \mapsto \bar{g}_{ir} = \lambda g_{ir}$  (e quindi  $g^{ir} \mapsto \bar{g}^{ir} = g^{ir} / \lambda$ ) otterremmo invece

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k(\lambda g_{rj}) + \partial_j(\lambda g_{rk}) - \partial_r(\lambda g_{jk}) \} \\
 &= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{ \lambda(g_{rj,k} + g_{rk,j} + g_{jk,r}) + g_{rj} \partial_k \lambda + g_{rk} \partial_j \lambda - g_{jk} \partial_r \lambda \} \\
 &= \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{2\lambda} \left( \delta_j^i \partial_k \lambda + \delta_k^i \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right)
 \end{aligned}$$

- ponendo  $\varphi_k = \frac{1}{\lambda} \partial_k \lambda$  otteniamo (3)

## Conto ( $\lambda$ )

- ricalibrando secondo  $g_{ir} \mapsto \bar{g}_{ir} = \lambda g_{ir}$  (e quindi  $g^{ir} \mapsto \bar{g}^{ir} = g^{ir} / \lambda$ ) otterremmo invece

$$\begin{aligned}
 \bar{\Gamma}_{jk}^i &= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k(\lambda g_{rj}) + \partial_j(\lambda g_{rk}) - \partial_r(\lambda g_{jk}) \} \\
 &= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{ \lambda(g_{rj,k} + g_{rk,j} + g_{jk,r}) + g_{rj} \partial_k \lambda + g_{rk} \partial_j \lambda - g_{jk} \partial_r \lambda \} \\
 &= \Gamma_{jk}^i + \frac{1}{2\lambda} \left( \delta_j^i \partial_k \lambda + \delta_k^i \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right)
 \end{aligned}$$

- ponendo  $\varphi_k = \frac{1}{\lambda} \partial_k \lambda$  otteniamo (3)

## “Zur Infinitesimalgeometrie ...”

*Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wiss. ...*, 1921, p.100

In der Relativitätstheorie haben projektive und konforme Beschaffenheit eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Die erstere, die Beharrungstendenz der Weltrichtungen eines sich bewegenden materiellen Teilchens, welche ihm, wenn es in Bestimmter Weltrichtung losgelassen ist, eine bestimmte “natürliche” Bewegung aufnötigt, ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an Stelle beider setzte, für die es aber bislang an einem suggestiven Namen mangelt. Der infinitesimale Kegel  $g_{ik}dx^i dx^k = 0$  aber vollzieht in der Nachbarschaft eines Weltpunktes die Scheidung von Vergangenheit und Zukunft; die konforme Beschaffenheit ist der Wirkungszusammenhang der Welt, durch den bestimmt wird, welche Weltpunkte miteinander in möglicher kausaler Verbindung stehen.

# Curvatura proiettiva

- Weyl definisce la *Projektivkrümmung*, misurata dal tensore

$$P_{bcd}^a = R_{bcd}^a - H_{bcd}^a$$

invariante rispetto alle trasformazioni proiettive

$$\Gamma_{bc}^a \mapsto \Gamma_{bc}^a + \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- $H_{bcd}^a$  è la parte del tensore di Riemann  $R_{bcd}^a$  che invece è sensibile alla riparametrizzazione delle geodetiche (della relativa connessione affine)

# Curvatura proiettiva

- Weyl definisce la *Projektivkrümmung*, misurata dal tensore

$$P_{bcd}^a = R_{bcd}^a - H_{bcd}^a$$

invariante rispetto alle trasformazioni proiettive

$$\Gamma_{bc}^a \mapsto \Gamma_{bc}^a + \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$$

- $H_{bcd}^a$  è la parte del tensore di Riemann  $R_{bcd}^a$  che invece è sensibile alla riparametrizzazione delle geodetiche (della relativa connessione affine)

# Curvatura conforme

- definisce inoltre la *Konformkrümmung*, misurata dal tensore detto ormai ‘di Weyl’

$$C_{bcd}^a = R_{bcd}^a - B_{bcd}^a,$$

invariante rispetto alle ricalibrizioni  $g \mapsto e^\lambda g$ , ossia alle trasformazioni conformi

$$\Gamma_{bc}^a \mapsto \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$$

- $B_{bcd}^a$  (funzione semplice del tensore di Ricci  $R_{bc} = R_{bac}^a$ ;  $R_{bc} = 0 \Rightarrow R_{bcd}^a = C_{bcd}^a$ ) è la parte del tensore di Riemann  $R_{bcd}^a$  che invece è sensibile alla ricalibrizione della metrica  
(le onde gravitazionali si propagano in regioni ricciplatte in cui la curvatura è tutta conforme)

# Curvatura conforme

- definisce inoltre la *Konformkrümmung*, misurata dal tensore detto ormai ‘di Weyl’

$$C_{bcd}^a = R_{bcd}^a - B_{bcd}^a,$$

invariante rispetto alle ricalibrizioni  $g \mapsto e^\lambda g$ , ossia alle trasformazioni conformi

$$\Gamma_{bc}^a \mapsto \Gamma_{bc}^a + \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$$

- $B_{bcd}^a$  (funzione semplice del tensore di Ricci  $R_{bc} = R_{bac}^a$ ;  $R_{bc} = 0 \Rightarrow R_{bcd}^a = C_{bcd}^a$ ) è la parte del tensore di Riemann  $R_{bcd}^a$  che invece è sensibile alla ricalibrizione della metrica  
(le onde gravitazionali si propagano in regioni ricciplatte in cui la curvatura è tutta conforme)

## Altre due curvatures

- aggiungo (solo per completezza, non serviranno nel seguito) che Weyl definisce anche la *Richtungskrümmung*  $\bar{R}_{bcd}^a$  e la *Längenkrümmung*  $F_{cd}$ , che soddisfano

$$R_{bcd}^a = \bar{R}_{bcd}^a - \frac{1}{2} \delta_b^a F_{cd}$$

- la *Längenkrümmung* non è altro che il rotore  $F = dA$  (il quale diventerà la 2-forma di Faraday nella TEG) della 1-forma ricalibrante

Dann und nur dann, wenn die durch Parallelverschiebung eines Vektors vollzogene Richtungsübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor  $\bar{R}$  der Richtungskrümmung; dann und nur dann, wenn die ebenso vollzogene Längenübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor  $F$  der Längenkrümmung.

- $R_{bcd}^a = \bar{R}_{bcd}^a$  se la 1-forma dilatante (il quadripotenziale elettromagnetico nella TEG) è esatta, e solo allora;  $C_{bcd}^a = 0 \Rightarrow F_{ab} = 0$  ma non viceversa

# Teorema di Weyl

Proiettive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme  $\{e^\lambda g\}$  ottenuta variando  $\lambda$  fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva  $P_{bcd}^a$  e la curvatura conforme  $C_{bcd}^a$  insieme determinano la curvatura  $R_{bcd}^a$  e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per  $\delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  e la classe di connessioni che differiscono per  $\frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  insieme fissano la connessione  $\Gamma_{bc}^a$  e pertanto la metrica

# Teorema di Weyl

Proiettive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme  $\{e^\lambda g\}$  ottenuta variando  $\lambda$  fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva  $P_{bcd}^a$  e la curvatura conforme  $C_{bcd}^a$  insieme determinano la curvatura  $R_{bcd}^a$  e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per  $\delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  e la classe di connessioni che differiscono per  $\frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  insieme fissano la connessione  $\Gamma_{bc}^a$  e pertanto la metrica

# Teorema di Weyl

Proiettive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme  $\{e^\lambda g\}$  ottenuta variando  $\lambda$  fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva  $P_{bcd}^a$  e la curvatura conforme  $C_{bcd}^a$  insieme determinano la curvatura  $R_{bcd}^a$  e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per  $\delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  e la classe di connessioni che differiscono per  $\frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  insieme fissano la connessione  $\Gamma_{bc}^a$  e pertanto la metrica

# Teorema di Weyl

Proiettive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme  $\{e^\lambda g\}$  ottenuta variando  $\lambda$  fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva  $P_{bcd}^a$  e la curvatura conforme  $C_{bcd}^a$  insieme determinano la curvatura  $R_{bcd}^a$  e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per  $\delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  e la classe di connessioni che differiscono per  $\frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  insieme fissano la connessione  $\Gamma_{bc}^a$  e pertanto la metrica

## Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla
- per esprimere l'effetto della libertà conforme  $[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  sul vettore normalizzato  $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$  possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2} \varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2} \varphi^\sharp,$$

dove  $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$  e  $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot)$

- per la libertà proiettiva  $[\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2 \langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

## Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla
- per esprimere l'effetto della libertà conforme  $[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  sul vettore normalizzato  $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$  possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2} \varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2} \varphi^\sharp,$$

dove  $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$  e  $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot)$

- per la libertà proiettiva  $[\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2 \langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

## Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla
- per esprimere l'effetto della libertà conforme  $[\Gamma_{bc}^a] = \frac{1}{2}(\delta_b^a \varphi_c + \delta_c^a \varphi_b - g_{bc} \varphi^a)$  sul vettore normalizzato  $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$  possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2} \varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2} \varphi^\sharp,$$

dove  $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$  e  $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot)$

- per la libertà proiettiva  $[\Gamma_{bc}^a] = \delta_b^a \psi_c + \delta_c^a \psi_b$  abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma_{bc}^a] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2 \langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

## Dimostrazione (resto)

- facendo coincidere le due libertà possiamo scrivere

$$\overbrace{2\langle\psi, \xi\rangle \cdot \xi}^{\text{proiettiva}} = \overbrace{\langle\varphi, \xi\rangle \cdot \xi - \varphi^\# / 2}^{\text{conforme}},$$

oppure, per vettori  $\xi$  ed  $\eta$  (normalizzati ma non collineari),

$$\varphi^\# = 2(\langle\varphi, \xi\rangle - 2\langle\psi, \xi\rangle) \cdot \xi = 2(\langle\varphi, \eta\rangle - 2\langle\psi, \eta\rangle) \cdot \eta,$$

eguaglianza che elimina entrambe le libertà imponendo  $\varphi = \psi = 0$

**Kennen wir also die Weltlinien zweien  $O$  passierenden, nur unter dem Einfluß des Führungsfeldes sich bewegenden Massenpunkte, so ist neben der quadratischen auch die lineare Fundamentalform in  $O$  eindeutig bestimmt.**

## “Zur Infinitesimalgeometrie ...”

*Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wiss. ...*, 1921, p.100

Es geht aus diesem Satz hervor, daß allein durch die Beobachtung der “natürlichen” Bewegung materieller Teilchen und der Wirkungs-, insbesondere der Licht-Ausbreitung die Weltmetrik festgelegt werden kann; Maßstäbe und Uhren sind nicht dazu erforderlich.

# *Mathematische Analyse des Raumproblems*

Berlino, Springer, 1923, p.19

Ist es uns in der wirklichen Welt also möglich, die Wirkungsausbreitung, insbesondere die Lichtausbreitung zu verfolgen, und vermögen wir außerdem die Bewegung freier Massenpunkte, welche dem Führungsfelde folgen, als solche zu erkennen und zu beobachten, so können wir daraus allein, ohne Zuhilfenahme von Uhren und starren Maßstäben, das metrische Feld ablesen.