La teoria elettrogravitazionale di Weyl
o
Come l'equità matematica portò alla 2-forma di Faraday

Alessandro Afriat
Istituto di Filosofia
Università di Urbino
afriat@uniurb.it

Dipartimento di matematica e informatica, Università della Basilicata
14 maggio 2007

www.uniurb.it/Filosofia/afriat/TEGPotenza.pdf

Indice

Introduzione

Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo
- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati
- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti
- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo

- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati

- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti

- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo

- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati

- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti

- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo

- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati

- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti

- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

Perché proprio la teoria elettrogravitazionale di Weyl?

Non si tratta di una teoria sbagliata, notoriamente confutata da Einstein?

- qualunque sia il suo rapporto **diretto** con l'esperienza, la TEG (teoria elettrogravitazionale di Weyl) è stata tutt'altro che empiricamente sterile, in quanto portò alle teorie di calibro, di cui sappiamo il grande successo

- la TEG non è stata nemmeno matematicamente sterile; rami della matematica tutt'ora attivi (varietà di Weyl ecc.) le sono strettamente collegati

- la genesi della TEG, e il dibattito tra Weyl ed Einstein, costituiscono un capitolo curioso della storia della scienza novecentesca, con vari meriti

- presentano inoltre un notevole interesse filosofico, che spero emerga nel seguito

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:

  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti

- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
    1. parità di lunghezza e direzione
    2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
    1. parità di lunghezza e direzione
    2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:

  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti

- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:
  1. parità di lunghezza e direzione
  2. delegittimazione dei confronti distanti
- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Programma

- incomincerò con la struttura affine (connessione, derivata covariante) nella relatività generale di Einstein
- poi Levi-Civita, che scoprì il carattere non integrabile del trasporto parallelo
- passerò quindi ai due pregiudizi aprioristici di Weyl:

    1. parità di lunghezza e direzione
    2. delegittimazione dei confronti distanti

- sosterrò che tali pregiudizi, benché distinti, hanno esattamente le stesse conseguenze logiche nella derivazione della TEG
- attribuirò il secondo prediugizio al contesto della giustificazione, sostenendo che il pregiudizio realmente effettivo nel contesto della scoperta fu il primo, la parità di lunghezza e direzione
- esporrò poi come la TEG emerse impremeditata da tale pregiudizio
- esaminerò infine certe caratteristiche salienti della TEG, il dibattito con Einstein sulla sua validità empirica, e il metodo causale-inerziale che Weyl contrappose ai regoli e orologi sui quali tanto insistè Einstein

Einstein (1915)

Struttura affine

- al centro della teoria gravitazionale di Einstein sono i simboli Γ^a_{bc}, i quali, fornendo un criterio di 'drittezza' (**parametrizzata**, quindi **anche tangenziale**) anzi di accelerazione nulla o 'inerzialità,' determinano la derivata covariante

$$A_{a;b} = \frac{\partial A_a}{\partial x_b} - \sum_c \Gamma^c_{ab} A_c$$

e quindi l'equazione del moto, la '*lex prima*'

$$0 = \frac{d^2 x^a}{ds^2} + \sum_{bc} \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{ds} \frac{dx^c}{ds},$$

dove il parametro s è **affine**

Parameter affine

- parametro 'inerziale,' che non 'accelera' lungo la linea d'universo
- dà il comportamento ('proprio') di un orologio 'corretto' a meno di una trasformazione lineare o 'affine' $\alpha s + \beta$, dove α e β sono delle costanti che determinano rispettivamente l'unità di tempo e lo zero
- α tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica $g : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$ è un'applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori ± 1 (una volta) e ∓ 1 (tre volte), ∂_0 è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e $T_P M$ è lo spazio vettoriale che all'evento P è tangente all'universo M)

Parameter affine

- parametro ‘inerziale,’ che non ‘accelera’ lungo la linea d’universo

- dà il comportamento (‘proprio’) di un orologio ‘corretto’ a meno di una trasformazione lineare o ‘affine’ $\alpha s + \beta$, dove α e β sono delle costanti che determinano rispettivamente l’unità di tempo e lo zero

- α tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica $g : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$ è un’applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori ± 1 (una volta) e ∓ 1 (tre volte), ∂_0 è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e $T_P M$ è lo spazio vettoriale che all’evento P è tangente all’universo M)

Parametro affine

- parametro ‘inerziale,’ che non ‘accelera’ lungo la linea d’universo

- dà il comportamento (‘proprio’) di un orologio ‘corretto’ a meno di una trasformazione lineare o ‘affine’ $\alpha s + \beta$, dove α e β sono delle costanti che determinano rispettivamente l’unità di tempo e lo zero

- α tipicamente viene scelto per dare

$$g(\partial_0, \partial_0) = \pm 1$$

(dove la metrica $g : T_P M \times T_P M \to \mathbb{R}$ è un’applicazione lineare, simmetrica, due volte covariante, con autovalori ± 1 (una volta) e ∓ 1 (tre volte), ∂_0 è il quadrivettore unitario lungo la coordinata temporale e $T_P M$ è lo spazio vettoriale che all’evento P è tangente all’universo M)

Componenti del campo gravitazionale

- le Γ^a_{bc} possono essere viste come le componenti del campo gravitazionale, campo che però dipende dal sistema di coordinate e può essere 'annullato' all'evento P passando a coordinate y^a che a P sono 'inerziali'

- rispetto a y^a, una geodetica $\sigma : I \to M : s \mapsto \sigma(s)$, anzi $\sigma^a = y^a(\sigma)$, soddisferà

$$0 = \frac{d^2\sigma^a}{ds^2}|_P,$$

dove I è un opportuno intervallo

Componenti del campo gravitazionale

- le Γ^a_{bc} possono essere viste come le componenti del campo gravitazionale, campo che però dipende dal sistema di coordinate e può essere 'annullato' all'evento P passando a coordinate y^a che a P sono 'inerziali'

- rispetto a y^a, una geodetica $\sigma : I \to M : s \mapsto \sigma(s)$, anzi $\sigma^a = y^a(\sigma)$, soddisferà

$$0 = \frac{d^2\sigma^a}{ds^2}|_P,$$

  dove I è un opportuno intervallo

Struttura affine e curvatura

- la connessione dà anche il tensore di Riemann

$$R^a_{bcd} = 2\Gamma^a_{b[d,c]} + \sum_m (\Gamma^a_{mc}\Gamma^m_{bd} - \Gamma^a_{md}\Gamma^m_{bc}),$$

  misura di curvatura, dove

$$A_{[ab]} = \frac{1}{2}(A_{ab} - A_{ba})$$

  e la virgola indica la derivata parziale:

$$A_{a,b} = \frac{\partial A_a}{\partial x^b} = \partial_b A_a$$

  (che non essendo covariante dipende dal sistema di coordinate, anzi dalle altre tre coordinate $c \neq b$)

Espressione geometrica del ‘differenziale’ covariante

- in linguaggio più geometrico la struttura affine, la connessione, viene determinata dalla derivata covariante
$$\nabla : \mathcal{T}_n^m M \to \mathcal{T}_{n+1}^m M,$$
che aumenta di uno il grado di ‘covarianza’ dell’argomento (lasciando invece invariata la ‘contravarianza’), dove $\mathcal{T}_n^m M$ è il modulo di campi tensoriali m volte contravarianti ed n volte covarianti su M

- l’operatore lineare (nonché leibniziano) ∇ può essere visto come una specie di ‘differenziale’ covariante, poiché applicato a una funzione $f \in \mathcal{T}_0^0 M$ dà proprio il differenziale
$$\nabla f = df \in \mathcal{T}_1^0 M$$

Espressione geometrica del ‘differenziale’ covariante

- in linguaggio più geometrico la struttura affine, la connessione, viene determinata dalla derivata covariante
$$\nabla : \mathcal{T}_n^m M \to \mathcal{T}_{n+1}^m M,$$
che aumenta di uno il grado di ‘covarianza’ dell’argomento (lasciando invece invariata la ‘contravarianza’), dove $\mathcal{T}_n^m M$ è il modulo di campi tensoriali m volte contravarianti ed n volte covarianti su M

- l’operatore lineare (nonché leibniziano) ∇ può essere visto come una specie di ‘differenziale’ covariante, poiché applicato a una funzione $f \in \mathcal{T}_0^0 M$ dà proprio il differenziale
$$\nabla f = df \in \mathcal{T}_1^0 M$$

Espressione geometrica della derivata covariante direzionale

- precisando una direzione $\dot{\gamma}$ di derivazione mediante una curva

$$\gamma : I \to M : g \mapsto \gamma(g)$$

otteniamo la 'contrazione' o 'prodotto interno' (qui scalare)

$$\langle df, \dot{\gamma} \rangle = \langle \nabla f, \dot{\gamma} \rangle = \nabla_{\dot{\gamma}} f = \nabla_g f = \frac{df}{dg} \in \mathcal{T}_0^0 M,$$

dove $\langle \alpha, v \rangle$ è il valore del covettore α al vettore v, e la lunghezza del vettore $\dot{\gamma} = d\gamma/dg$ tangente di γ dipende linearmente dall'andamento del parametro g (e rimarrà pertanto costante lungo γ se g è affine, per esempio se dà l'ora di un orologio corretto)

- in generale la derivata covariante direzionale non cambia la valenza del suo argomento:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} : \mathcal{T}_n^m M \to \mathcal{T}_n^m M$$

Espressione geometrica della derivata covariante direzionale

- precisando una direzione $\dot\gamma$ di derivazione mediante una curva

$$\gamma : I \to M : g \mapsto \gamma(g)$$

otteniamo la ‘contrazione’ o ‘prodotto interno’ (qui scalare)

$$\langle df, \dot\gamma \rangle = \langle \nabla f, \dot\gamma \rangle = \nabla_{\dot\gamma} f = \nabla_g f = \frac{df}{dg} \in \mathcal{T}_0^0 M,$$

dove $\langle \alpha, v \rangle$ è il valore del covettore α al vettore v, e la lunghezza del vettore $\dot\gamma = d\gamma/dg$ tangente di γ dipende linearmente dall’andamento del parametro g (e rimarrà pertanto costante lungo γ se g è affine, per esempio se dà l’ora di un orologio corretto)

- in generale la derivata covariante direzionale non cambia la valenza del suo argomento:

$$\nabla_{\dot\gamma} : \mathcal{T}_n^m M \to \mathcal{T}_n^m M$$

Sviluppo rispetto a una base

- scegliendo un sistema di coordinate e pertanto una base ∂_a abbiamo

$$\nabla_{\partial_a}\partial_b = \sum_c \Gamma^c_{ab}\partial_c$$

- oppure

$$\langle dx^c, \nabla_{\partial_a}\partial_b\rangle = \Gamma^c_{ab}$$

Sviluppo rispetto a una base

- scegliendo un sistema di coordinate e pertanto una base ∂_a abbiamo

$$\nabla_{\partial_a}\partial_b = \sum_c \Gamma^c_{ab}\partial_c$$

- oppure

$$\langle dx^c, \nabla_{\partial_a}\partial_b\rangle = \Gamma^c_{ab}$$

Equazione geometrica delle geodetiche

- una vera geodetica σ, con parametro s affine, soddisferà la '*lex prima*'

$$\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = \mathbf{0} \in \mathcal{T}^1_0 M$$

- una geodetica 'riparametrizzata' τ (linea d'universo che presenta accelerazioni soltanto tangenziali) dovrà solo soddisfare la condizione più debole

$$\lambda\dot{\tau} = \nabla_{\dot{\tau}}\dot{\tau},$$

  dove lo scalare λ varia lungo τ a seconda dell' 'accelerazione' del parametro t di τ rispetto al parametro (affine) s della vera geodetica σ

Equazione geometrica delle geodetiche

- una vera geodetica σ, con parametro s affine, soddisferà la '*lex prima*'

$$\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = \mathbf{0} \in \mathcal{T}_0^1 M$$

- una geodetica 'riparametrizzata' τ (linea d'universo che presenta accelerazioni soltanto tangenziali) dovrà solo soddisfare la condizione più debole

$$\lambda\dot{\tau} = \nabla_{\dot{\tau}}\dot{\tau},$$

  dove lo scalare λ varia lungo τ a seconda dell''accelerazione' del parametro t di τ rispetto al parametro (affine) s della vera geodetica σ

Derivata tensoriale

- una derivata lungo una curva $\gamma : I \to M$ di un campo tensoriale A al punto $\gamma(0)$ sarà un qualche limite

$$\lim_{g \to 0} \frac{1}{g} \{A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))\}$$

- tensori di pari valenza applicati allo stesso punto saranno anche paragonabili, ma la differenza $A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))$ al numeratore richiede un confronto a distanza, tra i punti $\gamma(g)$ e $\gamma(0)$

Derivata tensoriale

- una derivata lungo una curva $\gamma : I \to M$ di un campo tensoriale A al punto $\gamma(0)$ sarà un qualche limite
$$\lim_{g \to 0} \frac{1}{g} \{A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))\}$$

- tensori di pari valenza applicati allo stesso punto saranno anche paragonabili, ma la differenza $A(\gamma(g)) - A(\gamma(0))$ al numeratore richiede un confronto a distanza, tra i punti $\gamma(g)$ e $\gamma(0)$

Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso ‘parallela’ (piuttosto che ‘di Lie’)—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale

- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo

- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso 'parallela' (piuttosto che 'di Lie')—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale

- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo

- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

Einstein e il trasporto parallelo

- possiamo legittimare tale confronto precisando una modalità—in questo caso ‘parallela’ (piuttosto che ‘di Lie’)—di trasporto per ricondurre il confronto a distanza a un confronto locale

- la derivata covariante adoperata da Einstein presuppone siffatto spostamento parallelo

- ma egli non mostrò (almeno nel 1915-6) alcuna comprensione delle sue peculiarità, che invece furono scoperte da Tullio Levi-Civita, portando poi alla TEG

Levi-Civita (1917)

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque . . . ”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.173

L’incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli [di Riemann] in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l’apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante. Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile [. . .] venne via via ampliandosi per far debito posto anche all’interpretazione geometrica. In sulle prime avevo creduto di trovarla senz’altro nei lavori originali di Riemann [. . .]; ma ce n’è appena un embrione. [. . .] D’altra parte non c’è traccia [. . .] di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallele in una varietà qualunque [. . .]) che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico.

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque . . . ”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[. . .] cercando di caratterizzare il parallelismo di due direzioni (α), (α') uscenti da due punti vicinissimi P e P'. All'uopo si ricorda che qualunque varietà V_n si può risguardare immersa in uno spazio euclideo S_n a un numero abbastanza elevato N di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da P una generica direzione (f) di S_n, il parallelismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\text{angolo}\widehat{(f)(\alpha)} = \text{angolo}\widehat{(f)(\alpha')},$$

per qualunque (f). Orbene, il parallelismo in V_n si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta **per tutte le (f) appartenenti a** V_n (ossia alla giacitura di S_N tangente in P a V_n).

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque …”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[seguito] A giustificazione di tale definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento per le V_n euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perché in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di V_n, e non anche dall'ausiliario spazio ambiente S_N. Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallelismo si concreta come segue: Riferita la V_n a coordinate generali x_i $(i = 1, 2, \dots, n)$, siano dx_i gli incrementi corrispondenti al passaggio da P a P'; $\xi^{(i)}$ i parametri spettanti a una generica direzione (α) uscente da P; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina (α'), spiccata da P'. La condizione di parallelismo è espressa dalle n equazioni

$$d\xi^{(i)} + \sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_j\, \xi^{(l)} = 0 \tag{1}$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$, designando $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ i noti simboli di Christoffel.

“Nozione di parallelismo in una varietà qualunque ...”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[seguito] Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz'altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallele lungo una qualsiasi curva C. Se $x_i = x_i(s)$ ne costituiscono le equazioni parametriche, basta evidentemente risguardare, nelle (1), le x_i e subordinatamente le $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ come funzioni assegnate, le $\xi^{(i)}$ come funzioni da determinarsi del parametro s, e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {jl \atop i} \right\} \frac{dx_j}{ds} \xi^{(l)} = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, riducibile ad una forma tipica [...].

"Nozione di parallelismo in una varietà qualunque . . ."
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.175

[. . .] Ecco qualche conseguenza geometrica.

1° La direzione parallela in un punto generico P ad una direzione (α) uscente da un altro punto qualsiasi P_0 dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da P_0 a P. L'indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

Olonomia

- oggi parleremmo di olonomia, dicendo che il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio riemanniano n-dimensionale può essere $SO(n)$ (o addirittura $O(n)$ se lo spazio non è orientabile)

- il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio lorentziano potrà invece essere il gruppo di Lorentz 'proprio' L^+ (o addirittura il gruppo intero L se lo spazio non è orientabile)

Olonomia

- oggi parleremmo di olonomia, dicendo che il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio riemanniano n-dimensionale può essere $SO(n)$ (o addirittura $O(n)$ se lo spazio non è orientabile)

- il gruppo di olonomia relativo a un punto di uno spazio lorentziano potrà invece essere il gruppo di Lorentz 'proprio' L^+ (o addirittura il gruppo intero L se lo spazio non è orientabile)

Weyl (1918-)

Unificazione fortuita

- è stato sostenuto da Vizgin e altri che l'unificazione di gravità ed elettromagnetismo raggiunta nella teoria di Weyl fosse **voluta**

- da una lettera che Weyl scrisse ad Einstein il 10 dicembre 1918 risulta però che non lo fosse:

  > Übrigens müssen Sie nicht glauben, daß ich von der Physik her dazu gekommen bin, neben der quadratische noch die lineare Differentialform in die Geometrie einzuführen; sondern ich wollte wirklich diese "Inkonsequenz," die mir schon immer ein Dorn im Auge gewesen war, endlich einmal beseitigen und bemerkte dann zu meinem eigenen Erstaunen: das sieht so aus, als erklärt es die Elektrizität.

“Gravitation und Elektrizität”

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465

Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die überraschenderweise, auf die Welt angewendet, **nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt**.

Weyl (1918-)

I due pregiudizi

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico

- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:

  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza

- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti

- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico
- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza
- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti
- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico

- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
    1. la parità di direzione e lunghezza
    2. la delegittimazione dei confronti a distanza

- sosterrò
    – che i pregiudizi sono effettivamente distinti
    – che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti

- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico

- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza

- sosterrò
  – che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  – che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti

- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

I due pregiudizi aprioristici

- la TEG fu senz'altro frutto di pregiudizio aprioristico

- c'interesseranno **due** tali pregiudizi:
  1. la parità di direzione e lunghezza
  2. la delegittimazione dei confronti a distanza

- sosterrò
  - che i pregiudizi sono effettivamente distinti
  - che però nel contesto della TEG sono logicamente equivalenti

- ridondanza logica che può far dubitare che entrambi abbiano avuto un ruolo decisivo nel contesto della scoperta

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

1. Parità di direzione e lunghezza

- Levi-Civita aveva scoperto che il trasporto parallelo determinato dalla derivata covariante usata da Einstein cambiava la direzione ma non la lunghezza
- nel senso che la lunghezza del vettore trasportato era integrabile mentre la direzione dipendeva dal percorso seguito
- trattamento impari che offendeva il delicato senso di equilibrio, di giustizia matematica di Weyl
- il principio di base era questo: un vettore è fatto di direzione e lunghezza, entrambe dovevano godere delle stesse libertà
- i termini *wahrhafte Nahe-Geometrie* e *reine Infinitesimalgeometrie* indicherebbero più l'**esito** che il disegno, il programma
- il carattere fondamentalmente infinitesimale della geometria differenziale le apparteneva comunque, non va attribuito a Weyl; non era quello il suo pregiudizio
- il suo contributo era l'equa estenzione di tale carattere alla lunghezza

Allargamento del gruppo di olonomia

- insomma Weyl voleva allargare il gruppo di olonomia
  - ad $e^{\lambda} \oplus SO(n)$
    (da $SO(n)$: spazio riemanniano n-dimensionale orientabile)
  - ad $e^{\lambda} \oplus L^{+}$
    (da L^{+}: spazio lorentziano orientabile)

  dove il gruppo e^{λ} delle dilatazioni agisce solo sulla lunghezza del vettore

“Gravitation und Elektrizität”
Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918

Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen: 1. sie müssen **invariant** sein **gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen** [che riguardano direttamente le direzioni, e più indirettamente le lunghezze], 2. sie müssen ungeändert bleiben, **wenn man die** g_{ik} **durch** λg_{ik} **ersetzt**, wo λ eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist.

- già una specie di *par condicio* imposta a direzione e lunghezza

“Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie
Annalen der Physik **59**, 1919, p.101

Einleitung. Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf **Koordinaten** bezogen sein und müssen 2. gewisse **Maßeinheiten** festgelegt werden. Die bisherige E i n s t e i n sche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheit, zu gewinnen.

"Reine Infinitesimalgeometrie"

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.401

Zu jedem Punkt P gibt es geodätische Bezugssysteme [ossia sistemi 'inerziali' che annullano Γ^a_{bc}] . Ist ξ ein gegebener Vektor in P, P' aber ein zu P unendlich benachbarter Punkt, so verstehen wir unter dem aus ξ durch Parallelverschiebung nach P' entstehenden Vektor denjenigen Vektor in P', der in dem zu P gehörigen geodätischen Bezugssystem dieselben Komponenten wie ξ besitzt.

- quindi un trasporto sarà parallelo se, rispetto a coordinate geodetiche, non cambia le componenti del vettore trasportato

- vedremo che anche la caratterizzazione del trasporto **congruente** si riferirà al calibro 'geodetico,' che lascia invariata la lunghezza

Analogia

DIREZIONE	**LUNGHEZZA**
coordinate (a meno di ricalibrazioni)	calibro
trasporto parallelo	trasporto congruente
gravitazione	elettricità
connessione di Levi-Civita Γ^a_{bc}	connessione di lunghezza A
curvatura direzionale R^a_{bcd} (di Γ^a_{bc})	curvatura di lunghezza $F = dA$
coordinate geodetiche y^a (a P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	calibro geodetico (a P) $A' = A + d\lambda = 0$
princ. d'equival.: $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	princ. d'equival.: $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

Analogia

DIREZIONE	**LUNGHEZZA**
coordinate (a meno di ricalibrazioni)	calibro
trasporto parallelo	trasporto congruente
gravitazione	elettricità
connessione di Levi-Civita Γ^a_{bc}	connessione di lunghezza A
curvatura direzionale R^a_{bcd} (di Γ^a_{bc})	curvatura di lunghezza $F = dA$
coordinate geodetiche y^a (a P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	calibro geodetico (a P) $A' = A + d\lambda = 0$
princ. d'equival.: $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	princ. d'equival.: $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogia si realizzò nella TEG, che non era altro che il suo necessario compimento

“Coordinate (a meno di ricalibrazioni)”

- la contrapposizione coordinate-calibro, che Weyl propone più volte, può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

“Coordinate (a meno di ricalibrazioni)”

- la contrapposizione coordinate-calibro, che Weyl propone più volte, può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

“Coordinate (a meno di ricalibrazioni)”

- la contrapposizione coordinate-calibro, che Weyl propone più volte, può essere vista come contrapposizione direzione-lunghezza

- le coordinate a meno di ricalibrazioni danno solo direzioni

- un sistema x^a assegna ad ogni evento $P \in M$ una base $\partial_a \in T_P M$, e una base duale
$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T^*_P M$$
che dà le componenti $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ di ogni vettore $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Coordinate e direzione

- una ricalibrazione $g \mapsto e^{2\lambda} g$ induce una trasformazione $V \mapsto e^{\lambda} V$, o $V^a \mapsto e^{\lambda} V^a$, mediante

$$e^{2\lambda} g(V, V) = g(e^{\lambda} V, e^{\lambda} V) = g(e^{\lambda} \partial_a, e^{\lambda} \partial_b) V^a V^b = g(\partial_a, \partial_b) e^{\lambda} V^a e^{\lambda} V^b.$$

- la direzione, data dai rapporti

$$e^{\lambda} V^0 : e^{\lambda} V^1 : e^{\lambda} V^2 : e^{\lambda} V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

rimane inalterata

Coordinate e direzione

- una ricalibrazione $g \mapsto e^{2\lambda} g$ induce una trasformazione $V \mapsto e^{\lambda} V$, o $V^a \mapsto e^{\lambda} V^a$, mediante

$$e^{2\lambda} g(V, V) = g(e^{\lambda} V, e^{\lambda} V) = g(e^{\lambda} \partial_a, e^{\lambda} \partial_b) V^a V^b = g(\partial_a, \partial_b) e^{\lambda} V^a e^{\lambda} V^b.$$

- la direzione, data dai rapporti

$$e^{\lambda} V^0 : e^{\lambda} V^1 : e^{\lambda} V^2 : e^{\lambda} V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

rimane inalterata

2. Scetticismo relativo ai confronti a distanza

- pregiudizio sottolineato da Ryckman, che sembra reputarlo effettivo nel contesto della scoperta

- espresso nei due brani che seguono

2. Scetticismo relativo ai confronti a distanza

- pregiudizio sottolineato da Ryckman, che sembra reputarlo effettivo nel contesto della scoperta

- espresso nei due brani che seguono

"Geometrie und Physik"
Die Naturwissenschaften **19**, 1931, p.52

Die Philosophen mögen recht haben, daß unser Anschauungsraum, gleichgültig, was die physikalische Erfahrung sagt, euklidische Struktur trägt. Nur bestehe ich allerdings dann darauf, daß zu diesem Anschauungsraum das Ich-Zentrum gehört und daß die Koinzidenz, die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ich-Zentrum entfernt. In der theoretischen Konstruktion spiegelt sich das wider in dem Verhältnis zwischen der krummen Fläche und ihrer Tangentenebene im Punkte P: beide decken sich in der unmittelbaren Umgebung des Zentrums P, aber je weiter man sich von P entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Fläche und Ebene.

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft
Monaco, Oldenbourg, 2000, p.173

Erkennt man neben dem physischen einen **Anschauungsraum** an und behauptet von ihm, daß seine Maßstruktur aus Wesensgründen die euklidischen Gesetze erfülle, so steht dies mit der Physik nicht in Widerspruch, sofern sie an der euklidischen Beschaffenheit der **unendlich kleinen Umgebung** eines punktes O (in dem sich das Ich momentan befindet) festhält [...]. Aber man muß dann zugeben, daß die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ichzentrum entfernt. Er ist einer Tangentenebene zu vergleichen, die im Punkte O an eine krumme Fläche, den physischen Raum, gelegt ist: in der unmittelbaren Umgebung von O decken sich beide, aber je weiter man sich von O entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Ebene und Fläche.

Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche

- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente

- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche

- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente

- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

Uniformità dello spazio euclideo dell'intuizione

- l'uniformità, l'omogeneità (la costanza del tensore di Riemann—ovunque nullo—e del tensore metrico) dello spazio euclideo permette una sua comprensione globale, nella misura in cui la conoscenza di una parte consente la conoscenza del tutto, fatto com'è di parti identiche

- l' 'io-centro,' cogliendo una parte dello spazio tangente euclideo 'dell'intuizione,' lo coglie tutto, mentre capta soltanto la piccola parte dello spazio fisico curvo che assomiglia allo spazio tangente

- il resto dello spazio fisico presenterà infinite ed imprevedibili possibilità di variazione

Evidenz

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro

- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di P

- l'integrabilità andava pertanto abbandonata …

Evidenz

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro

- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di P

- l'integrabilità andava pertanto abbandonata …

Evidenz

- la *Evidenz*, puntello e garante psicologico della verità scientifica, sarebbe circoscritta all'immediata vicinanza dell' 'io-centro,' nella quale il piano tangente ritenuto psicologicamente privilegiato dai filosofi avrebbe appunto un rapporto 'di copertura,' quasi di coincidenza, con la superficie curva, rapporto che si attenua con l'allontanarsi dall'io-centro

- se i confronti di lunghezza vanno sanciti dall'*Evidenz*, il loro dominio di legittimità non potrà oltrepassare la *Umgebung* di P

- l'integrabilità andava pertanto abbandonata …

Ragionamento successivo alla derivazione della teoria?

- la vicenda testuale di *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* è complessa, ma l'articolo originario uscito con lo stesso titolo nel *Handbuch der Philosophie* risale al 1928
- espressioni di tale scettismo (diciamo 'articolato,' esplicito) precedenti al 1928 non sono a mia conoscenza

Ragionamento successivo alla derivazione della teoria?

- la vicenda testuale di *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft* è complessa, ma l'articolo originario uscito con lo stesso titolo nel *Handbuch der Philosophie* risale al 1928
- espressioni di tale scettismo (diciamo 'articolato,' esplicito) precedenti al 1928 non sono a mia conoscenza

"Gravitation und Elektrizität"

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465

Eine wahrhafte Nahe-Geometrie darf jedoch nur ein Prinzip der Übertragung einer Länge von einem Punkt zu einem unendlich benachbarten kennen, und es ist dann von vornherein ebensowenig anzunehmen, daß das Problem der Längenübertragung von einem Punkte zu einem endlich entfernten integrabel ist, wie sich das Problem der Richtungsübertragung als integrabel herausgestellt hat.

risale al 1918, ma sembra più una pretesa di equo trattamento di direzione e lunghezza che non espressione dello scetticismo di cui nei brani proiettati dianzi

“Reine Infinitesimalgeometrie”
Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.385

Indem ich die R i e m a n n sche Geometrie, die doch reine “Nahe-Geometrie” sein will, von einer ihr gegenwärtig noch anhaftenden Inkonsequenz befreite, ein letztes ferngeometrisches Element ausstieß, das sie von ihrer Euklidischen Vergangenheit her noch bei sich führte [. . .].

In dieser Note möchte ich jene **reine Infinitesimalgeometrie** entwickeln, die nach meiner Überzeugung die physikalische Welt als einen Sonderfall in sich begreift.

(scritto dopo “Gravitation und Elektrizität”; il 18 settembre stava per uscire—“bald erscheint”)

Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi

- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione

- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:

  le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure **devono avere distribuzioni gaussiane**)

  pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale

- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi

- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione

- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:

  le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente (oppure **devono avere distribuzioni gaussiane**)

  pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale

- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi

- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione

- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:

  > **le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente** (oppure **devono avere distribuzioni gaussiane**)

  pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale

- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

Pregiudizi diversi

- fuori dal contesto della TEG, i due pregiudizi di Weyl sono indubbiamente diversi

- la pretesa di equo trattamento di lunghezza e direzione non deve necessariamente avere a che vedere col trasporto parallelo, o con la differenziazione

- potrebbe esprimersi per esempio nell'affermazione:

  > **le direzioni e anche le lunghezze dei vettori di tale insieme devono essere distribuite uniformemente** (oppure **devono avere distribuzioni gaussiane**)

  pretesa che riguarda né derivata covariante né calcolo infinitesimale

- mentre il secondo pregiudizio è marcatamente 'infinitesimale'

Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti

- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente

  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza

- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti

- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente

  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza

- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti

- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza

- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti

- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente
  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza

- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

Equivalenza logica dei pregiudizi nel contesto della TEG

- ma trovandosi nel contesto della TEG, i due pregiudizi diventano logicamente equivalenti

- posto che la direzione in uno spazio curvo comunque non sarà né integrabile né confrontabile a distanza, sembrerebbe equivalente

  1. pretendere pari trattamento di lunghezza e direzione nel trasporto parallelo
  2. vietare i confronti a distanza

- ridondanza logica che fa appunto sospettare che solo il primo pregiudizio fosse realmente effettivo nel contesto della scoperta

“Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie
Annalen der Physik **59**, 1919, p.102

Wie man sieht, entspricht dieser Standpunkt gegenüber der Frage der Maßeinheit genau demjenigen, welchen die spezielle Relativitätstheorie hinsichtlich des Achsenkreuzes einnimmt. Die allgemeine Relativitätstheorie wird statt dessen nur postulieren, daß α von der Strecke unabhängig ist, nicht aber vom Orte; sie muß die ohnehin in einer reinen “Nahegeometrie” unzuläßige Annahme der Möglichkeit des “Fernvergleichs” fallen lassen: nur Strecken, die sich an der gleichen Stelle befinden, lassen sich aneinander messen.

- priorità del primo pregiudizio è piuttosto chiara

- programma infinitesimale rimane vago, senza esplicita articolazione, né fondamento metafisico o epistemologico o husserliano

Weyl (1918-)

La teoria elettrogravitazionale

Varietà affinemente connessa

- Weyl dice la varietà M *affinamente connessa* se lo spazio tangente $T_P M$ ad ogni punto $P \in M$ è connesso a tutti gli spazi tangenti adiacenti $T_{P'} M$ mediante un'applicazione

$$\mathfrak{T}_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \mathfrak{T}_X V_P$$

lineare sia nell'argomento 'principale' $V_P \in T_P M$ sia nell'argomento (corto) direzionale

$$X = P' - P,$$

dove P' (essendo vicino a P) e quindi X vengono visti come appartenenti a $T_P M$

- essendo lineare, $\mathfrak{T}_X$ sarà rappresentata da una matrice, cioè da

$$\mathfrak{T}^a_b = \langle dx^a, \mathfrak{T}_X \partial_b \rangle = \mathfrak{T}^a_{bc} X^c = \langle dx^a, \mathfrak{T}_{\partial_c} \partial_b \rangle \langle dx^c, X \rangle$$

Varietà affinemente connessa

- Weyl dice la varietà M *affinamente connessa* se lo spazio tangente $T_P M$ ad ogni punto $P \in M$ è connesso a tutti gli spazi tangenti adiacenti $T_{P'} M$ mediante un'applicazione

$$\mathfrak{T}_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \mathfrak{T}_X V_P$$

lineare sia nell'argomento 'principale' $V_P \in T_P M$ sia nell'argomento (corto) direzionale

$$X = P' - P,$$

dove P' (essendo vicino a P) e quindi X vengono visti come appartenenti a $T_P M$

- essendo lineare, $\mathfrak{T}_X$ sarà rappresentata da una matrice, cioè da

$$\mathfrak{T}^a_b = \langle dx^a, \mathfrak{T}_X \partial_b \rangle = \mathfrak{T}^a_{bc} X^c = \langle dx^a, \mathfrak{T}_{\partial_c} \partial_b \rangle \langle dx^c, X \rangle$$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$V^a_P = \langle dx^a_P, V_P \rangle \ \text{e} \ X^a$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{V^b\}, \{X^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto $-\Gamma^a_{bc} V^b X^c$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$V^a_P = \langle dx^a_P, V_P \rangle \text{ e } X^a$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{V^b\}, \{X^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto $-\Gamma^a_{bc} V^b X^c$

Differenze delle componenti

- Weyl si riferisce specificamente alle componenti

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

richiedendo che siano lineari nelle componenti

$$V^a_P = \langle dx^a_P, V_P \rangle \text{ e } X^a$$

- la funzione bilineare

$$\Gamma^a(\{V^b\}, \{X^c\}) = \delta V^a$$

sarà una matrice, rappresentata da Γ^a_{bc}

- la differenza δV^a sarà pertanto $-\Gamma^a_{bc} V^b X^c$

Coordinate geodetiche

- rispetto alle coordinate *geodetiche* y^a che annullano

$$\Gamma^a_b = \Gamma^a_{bc} X^c = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{a(y)} \rangle \text{ e } \delta V^a,$$

lasciando invariate le componenti V^a, $\mathfrak{T}^a_b$ diventa la matrice identità

$$\delta^a_b = \langle dy^a, \mathfrak{T}_X \partial_{a(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- fisicamente ha a che vedere col principio di equivalenza, secondo il quale un campo gravitazionale Γ^a_{bc} può sempre essere eliminato o generato a P da un'opportuna scelta di coordinate

Coordinate geodetiche

- rispetto alle coordinate *geodetiche* y^a che annullano

$$\Gamma^a_b = \Gamma^a_{bc} X^c = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{a(y)} \rangle \text{ e } \delta V^a,$$

lasciando invariate le componenti V^a, $\mathfrak{T}^a_b$ diventa la matrice identità

$$\delta^a_b = \langle dy^a, \mathfrak{T}_X \partial_{a(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- fisicamente ha a che vedere col principio di equivalenza, secondo il quale un campo gravitazionale Γ^a_{bc} può sempre essere eliminato o generato a P da un'opportuna scelta di coordinate

Passaggio alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento
- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza
$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$
chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)
- scompare pertanto l'indice superiore di Γ^a_{bc}, lasciando $\delta l = \Gamma_{bc} V^b X^c$
- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio
- se ora prendiamo un'unica componente dell'argomento principale $\{V^0, \ldots, V^3\}$, chiamandola l (sarà la lunghezza quadra), scompare anche uno degli indici inferiori di Γ_{bc}, lasciando
$$\delta l = \Gamma_c l X^c,$$
dove $\Gamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sono le componenti di una 1-forma, denotata A con l'elettricità in mente

Passaggio alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento
- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza
$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$
chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)
- scompare pertanto l'indice superiore di Γ^a_{bc}, lasciando $\delta l = \Gamma_{bc} V^b X^c$
- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio
- se ora prendiamo un'unica componente dell'argomento principale $\{V^0, \ldots, V^3\}$, chiamandola l (sarà la lunghezza quadra), scompare anche uno degli indici inferiori di Γ_{bc}, lasciando
$$\delta l = \Gamma_c l X^c,$$
dove $\Gamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sono le componenti di una 1-forma, denotata A con l'elettricità in mente

Passaggio alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento
- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza
$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$
chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)
- scompare pertanto l'indice superiore di Γ^a_{bc}, lasciando $\delta l = \Gamma_{bc} V^b X^c$
- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio
- se ora prendiamo un'unica componente dell'argomento principale $\{V^0, \ldots, V^3\}$, chiamandola l (sarà la lunghezza quadra), scompare anche uno degli indici inferiori di Γ_{bc}, lasciando
$$\delta l = \Gamma_c l X^c,$$
dove $\Gamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sono le componenti di una 1-forma, denotata A con l'elettricità in mente

Passaggio alla lunghezza

- con la giustizia matematica in mente Weyl passa poi alla lunghezza, con lo stesso ragionamento
- per chiarire la sua procedura possiamo prendere un'unica componente della differenza
$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$
chiamandola δl (diventerà la 'differenza scalare di lunghezza quadra,' o DSLQ)
- scompare pertanto l'indice superiore di Γ^a_{bc}, lasciando $\delta l = \Gamma_{bc} V^b X^c$
- magari possiamo vedere questa connessione Γ_{bc} intermedia e ibrida come $\langle A, \nabla_{\partial_b} \partial_c \rangle$, per esempio
- se ora prendiamo un'unica componente dell'argomento principale $\{V^0, \ldots, V^3\}$, chiamandola l (sarà la lunghezza quadra), scompare anche uno degli indici inferiori di Γ_{bc}, lasciando
$$\delta l = \Gamma_c l X^c,$$
dove $\Gamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sono le componenti di una 1-forma, denotata A con l'elettricità in mente

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione $A(l, X) = \delta l$ lineare di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una 1-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

  dove α è la 1-forma DLQ

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione $A(l, X) = \delta l$ lineare di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una 1-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

dove α è la 1-forma DLQ

Ragionamento di Weyl

- ma questo non è proprio il ragionamento di Weyl, che possiamo esprimere come segue

- l'oggetto A che genera la DSLQ δl dovrà essere lineare nella lunghezza quadra l e nella direzione X

- una funzione $A(l, X) = \delta l$ lineare di uno scalare l e di un vettore X che dà uno scalare δl sarà una 1-forma:

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

  dove α è la 1-forma DLQ

Notazione di Weyl

- Weyl in realtà scrive

$$dl = -l d\varphi,$$

  che possiamo tradurre

$$\alpha = -lA$$

- i d fuorvianti vanno capiti localmente e non globalmente

Notazione di Weyl

- Weyl in realtà scrive

  $$dl = -l d\varphi,$$

  che possiamo tradurre

  $$\alpha = -lA$$

- i d fuorvianti vanno capiti localmente e non globalmente

Esattezza

- ma una 1-forma *esatta* $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- serviva pertanto una 1-forma A con quadrirotore $F = dA$ non nullo

Esattezza

- ma una 1-forma *esatta* $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

  $$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- serviva pertanto una 1-forma A con quadrirotore $F = dA$ non nullo

Esattezza

- ma una 1-forma *esatta* $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- serviva pertanto una 1-forma A con quadrirotore $F = dA$ non nullo

Esattezza

- ma una 1-forma *esatta* $A = d\mu$ renderebbe integrabile il trasporto congruente, togliendo all'allungamento

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

  la dipendenza dal percorso γ

- era proprio dell'integrabilità che Weyl voleva liberarsi, per parificare lunghezza e direzione

- una 1-forma esatta, pur dilatando, non impedirebbe i confronti a distanza (indipendenti dal percorso), lasciando irrisolta la sperequazione di base

- serviva pertanto una 1-forma A con quadrirotore $F = dA$ non nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la 1-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà effettivamente una 1-forma inesatta

- l non sarà generalmente nulla, e pertanto la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un intorno, dove il calibro $\lambda : M \to \mathbb{R}^+$ è *geodetico*

- essendo $d\lambda$ una 1-forma, anche A sarà una 1-forma

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A *localmente*, e quindi A deve solo essere chiusa

- affinché A sia esatta, il quadrirotore $F = dA$ non può essere nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la 1-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà effettivamente una 1-forma inesatta

- l non sarà generalmente nulla, e pertanto la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un intorno, dove il calibro $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ è *geodetico*

- essendo $d\lambda$ una 1-forma, anche A sarà una 1-forma

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A *localmente*, e quindi A deve solo essere chiusa

- affinché A sia esatta, il quadrirotore $F = dA$ non può essere nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la 1-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà effettivamente una 1-forma inesatta

- l non sarà generalmente nulla, e pertanto la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un intorno, dove il calibro $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}^+$ è *geodetico*

- essendo $d\lambda$ una 1-forma, anche A sarà una 1-forma

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A *localmente*, e quindi A deve solo essere chiusa

- affinché A sia esatta, il quadrirotore $F = dA$ non può essere nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la 1-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà effettivamente una 1-forma inesatta

- l non sarà generalmente nulla, e pertanto la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un intorno, dove il calibro $\lambda : M \to \mathbb{R}^+$ è *geodetico*

- essendo $d\lambda$ una 1-forma, anche A sarà una 1-forma

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A *localmente*, e quindi A deve solo essere chiusa

- affinché A sia esatta, il quadrirotore $F = dA$ non può essere nullo

Calibro geodetico

- la richiesta che la 1-forma DLQ

$$\alpha = -lA$$

  sia localmente annullabile per ricalibrazione conferma che A sarà effettivamente una 1-forma inesatta

- l non sarà generalmente nulla, e pertanto la richiesta di Weyl significa che $A + d\lambda$ si annulli in un intorno, dove il calibro $\lambda : M \to \mathbb{R}^+$ è *geodetico*

- essendo $d\lambda$ una 1-forma, anche A sarà una 1-forma

- mentre $d\lambda$ è esatta, Weyl chiede solo che annulli A *localmente*, e quindi A deve solo essere chiusa

- affinché A sia esatta, il quadrirotore $F = dA$ non può essere nullo

Raum Zeit Materie
Berlino, Springer, 1923, p.122

Ein Punkt P hängt also mit seiner Umgebung metrisch zusammen, wenn von jeder Strecke in P feststeht, welche Strecke aus ihr durch kongruente Verpflanzung von P nach dem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' hervorgeht. Die einzige Forderung, welche wir an diesen Begriff stellen (zugleich die weitgehendste, die überhaupt möglich ist), ist diese: Die Umgebung von P läßt sich so eichen, daß die Maßzahl einer jeden Strecke in P durch kongruente Verpflanzung nach den unendlich benachbarten Punkten keine Änderung erleidet.

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono essere localmente annullate, per esempio

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono essere localmente annullate, per esempio

Carattere tensoriale di A

- ci si può chiedere come fa il tensore A a essere la controparte della connessione Γ^a_{bc}, che manifestamente non è tensore

- le componenti $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ però si trasformano tensorialmente solo rispetto alle trasformazioni di coordinate

$$A_a \mapsto \overline{A}_b = A_a \langle d\overline{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- rispetto alle ricalibrazioni

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

le componenti A_a non si trasformano 'tensorialmente,' e possono essere localmente annullate, per esempio

L'elettromagnetismo

- vedendo $F = dA$ e la sua conseguenza $dF = 0$, Weyl non poteva non riconoscere il quadripotenziale elettromagnetico A, la 2-forma di Faraday $F = dA$, e le due equazioni omogenee di Maxwell espresse da $dF = 0$, ossia

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times E + \partial B/\partial t = 0$$

- per non parlare di un 'principio d'equivalenza' elettromagnetico, secondo il quale la DSLQ δl e la 1-form DLQ α, così come il potenziale elettromagnetico A, possono essere generati o eliminati localmente da un opportuno calibro λ

L'elettromagnetismo

- vedendo $F = dA$ e la sua conseguenza $dF = 0$, Weyl non poteva non riconoscere il quadripotenziale elettromagnetico A, la 2-forma di Faraday $F = dA$, e le due equazioni omogenee di Maxwell espresse da $dF = 0$, ossia

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{e} \quad \nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

- per non parlare di un 'principio d'equivalenza' elettromagnetico, secondo il quale la DSLQ δl e la 1-form DLQ α, così come il potenziale elettromagnetico A, possono essere generati o eliminati localmente da un opportuno calibro λ

In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

  dove $A_a = A(\partial_a)$, le E_x, E_y, E_z sono le componenti del campo elettrico e le B_x, B_y, B_z quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

In coordinate

- in coordinate scriveremmo:

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

  dove $A_a = A(\partial_a)$, le E_x, E_y, E_z sono le componenti del campo elettrico e le B_x, B_y, B_z quelle del campo magnetico

- oppure

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.385

Nach dieser Theorie ist **alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik**; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. [...][1]

⋮

1. Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l’integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l’assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Integrabilità impedita dal campo elettromagnetico

- l'integrabilità veniva impedita dal tensore di Faraday, ossia dal campo elettromagnetico
- laddove era nullo, la lunghezza diventava confrontabile a distanza, senza alcuna dipendenza dal percorso seguito
- ma se la giustizia matematica, la *par condicio*, veniva garantita dal tensore di Faraday, l'assenza del campo elettromagnetico—assolutamente possibile—riproponeva la sperequazione che Weyl si era tanto adoperato per eliminare

Libertà di calibro

- visto che conta il quadrirotore $F = dA$, siamo liberi di aggiungere ad A il differenziale $d\mu$ di una funzione μ

- trasformando il quadripotenziale secondo

$$A \to A' = A + d\mu,$$

il quadrirotore

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

rimane invariato

Libertà di calibro

- visto che conta il quadrirotore $F = dA$, siamo liberi di aggiungere ad A il differenziale $d\mu$ di una funzione μ

- trasformando il quadripotenziale secondo

$$A \to A' = A + d\mu,$$

  il quadrirotore

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

  rimane invariato

Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale $d\mu$, la lunghezza ne esce cambiata

- trasportando il vettore X_0 dal punto P_0 con valore $\mu_0 = \mu(P_0)$ al punto P_1 con valore $\mu_1 = \mu(P_1)$, la lunghezza quadra finale $g_1(X_1, X_1)$ acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile) $e^{\Delta\mu}$, dove $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- questo perché la funzione μ cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale $d\mu$, la lunghezza ne esce cambiata

- trasportando il vettore X_0 dal punto P_0 con valore $\mu_0 = \mu(P_0)$ al punto P_1 con valore $\mu_1 = \mu(P_1)$, la lunghezza quadra finale $g_1(X_1, X_1)$ acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile) $e^{\Delta\mu}$, dove $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- questo perché la funzione μ cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale $d\mu$, la lunghezza ne esce cambiata

- trasportando il vettore X_0 dal punto P_0 con valore $\mu_0 = \mu(P_0)$ al punto P_1 con valore $\mu_1 = \mu(P_1)$, la lunghezza quadra finale $g_1(X_1, X_1)$ acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile) $e^{\Delta\mu}$, dove $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- questo perché la funzione μ cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Allungamento aggiuntivo

- ma anche se il quadrirotore non vede il differenziale $d\mu$, la lunghezza ne esce cambiata

- trasportando il vettore X_0 dal punto P_0 con valore $\mu_0 = \mu(P_0)$ al punto P_1 con valore $\mu_1 = \mu(P_1)$, la lunghezza quadra finale $g_1(X_1, X_1)$ acquisisce il fattore aggiuntivo (integrabile) $e^{\Delta\mu}$, dove $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$

- questo perché la funzione μ cambia l'allungamento secondo:

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A}$$

- pertanto

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme e^{μ}:

$$g \to g' = e^{\mu} g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme e^{μ}:

$$g \to g' = e^{\mu} g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g'_1(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g'_0(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Trasformazione conforme

- per ristabilire l'invarianza dell'allungamento, dobbiamo compensare moltiplicando la metrica per il fattore conforme e^{μ}:

$$g \to g' = e^{\mu} g$$

- insieme le due trasformazioni lasciano invariato l'allungamento:

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- cancellando gli esponenziali, riotteniamo

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Connessione ‘metrica’

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**

- la metrica g è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione ∇ se

$$\nabla g = 0$$

- in tal caso le linee d’universo più dritte (soddisfacenti $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Connessione ‘metrica’

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**

- la metrica g è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione ∇ se

$$\nabla g = 0$$

- in tal caso le linee d’universo più dritte (soddisfacenti $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Connessione 'metrica'

- il rapporto tra le due trasformazioni appena viste si esprime anche nella **compatibilità di Weyl**

- la metrica g è detta **compatibile** (in senso stretto) con la connessione ∇ se

$$\nabla g = 0$$

- in tal caso le linee d'universo più dritte (soddisfacenti $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$) saranno anche le più corte, soddisfacendo inoltre

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Compatibilità di Weyl

- la metrica ricalibrata $e^\mu g$ soddisferà solo un'allargata compatibilità, detta 'di Weyl' ed espressa da
$$\nabla(e^\mu g) = d\mu \otimes (e^\mu g),$$
in cui vediamo giustapposte le due trasformazioni che si compensano lasciando inalterate le lunghezze

- essendo nullo il differenziale $d\lambda = 0$ di una costante λ, ogni multiplo $e^\lambda g$ costante di g sarà sempre compatibile con ∇:
$$\nabla(e^\lambda g) = d\lambda \otimes (e^\lambda g) = 0 \otimes (e^\lambda g) = 0$$

Compatibilità di Weyl

- la metrica ricalibrata $e^{\mu}g$ soddisferà solo un'allargata compatibilità, detta 'di Weyl' ed espressa da
$$\nabla(e^{\mu}g) = d\mu \otimes (e^{\mu}g),$$
in cui vediamo giustapposte le due trasformazioni che si compensano lasciando inalterate le lunghezze

- essendo nullo il differenziale $d\lambda = 0$ di una costante λ, ogni multiplo $e^{\lambda}g$ costante di g sarà sempre compatibile con ∇:
$$\nabla(e^{\lambda}g) = d\lambda \otimes (e^{\lambda}g) = 0 \otimes (e^{\lambda}g) = 0$$

Weyl (1918-)

Il dibattito con Einstein

Primi scambi

- il primo marzo del diciotto Weyl scrisse ad Einstein

  > Dieser Tage ist es mir, wie ich glaube, gelungen, Elektrizität und Gravitation aus einer gemeinsamen Quelle herzuleiten.

- dopo cinque giorni Einstein rispose con entusiasmo . . . lasciando però già trapelare qualche dubbio:

  > Ihre Abhandlung ist gekommen. Es ist ein Genie-Streich ersten Ranges. Allerdings war ich bisher nicht imstande, meinen Massstab-Einwand zu erledigen. Darüber ein andermal ausführlicher.

- la cartolina successiva continuò

  > Ihr Gedankengang ist von wunderbarer Geschlossenheit. [. . .] Abgesehen von der Übereinstimmung mit der Wirklichkeit ist es jedenfalls eine grandiose Leistung des Gedankens.

L'obiezione di Einstein

- il 15 aprile Einstein tornò, come già intimato, sulla *Massstab-Einwand* (che poi sarebbe più una *Uhr-Einwand*):

  > So schön Ihre Gedanke ist, muss ich doch offen sagen, dass es nach meiner Ansicht ausgeschlossen ist, dass die Theorie die Natur entspricht. Das ds selbst hat nämlich reale Bedeutung. Denken Sie sich zwei Uhren, die relativ zueinander ruhend neben einander gleich rasch gehen. Werden sie voneinander getrennt, in beliebiger Weise bewegt und dann wieder zusammen gebracht, so werden sie wieder gleich (rasch) gehen, d. h. ihr relativer Gang hängt nicht von der Vorgeschichte ab. Denke ich mir zwei Punkte P_1 & P_2 die durch eine Zeitartige Linie verbunden werden können. Die an P_1 & P_2 anliegenden zeitartigen Elemente ds_1 und ds_2 können dann durch mehrere zeitartigen Linien verbunden werden, auf denen sie liegen. Auf diesen laufende Uhren werden ein Verhältnis $ds_1 : ds_2$ liefern, welches von der Wahl der verbindenden Kurven unabhängig ist.—Lässt man den Zusammenhang des ds mit Massstab- und Uhr-Messungen fallen, so verliert die Rel. Theorie überhaupt ihre empirische Basis.

Le linee spettrali

- il 19 aprile Einstein riprese la questione, formulando la famosa obiezione delle linee spettrali:

> [. . .] wenn die Länge eines Einheitsmassstabes (bezw. die Gang-Geschwindigkeit einer Einheitsuhr) von der Vorgeschichte abhingen. Wäre dies in der Natur wirklich so, dann könnte es nicht chemische Elemente mit Spektrallinien von bestimmter Frequenz geben, sondern es müsste die relative Frequenz zweier (räumlich benachbarter) Atome der gleichen Art im Allgemeinen verschieden sein. Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muss.

Einstellung e *Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

Einstellung e *Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

Einstellung e *Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

Einstellung e *Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

Einstellung e *Beharrung*

- Weyl non contestò mai l'obiezione, anzi l'integrabilità effettivamente osservata
- dapprima si limitò a sottolineare i meriti matematici ed estetici della teoria, che eventualmente potevano far passare qualche difettuccio empirico in secondo piano
- poi, facendo di necessità virtù, ritoccò la teoria per abbracciare il comportamento scomodo, il quale ne divenne un teorema, una previsione
- propose la distinzione tra *Einstellung* e *Beharrung*
- regoli e orologi non conservano una memoria delle loro storie, delle condizioni elettromagnetiche attraversate, perché si adattano subito alle condizioni locali alle quali sono soggetti

“Elektrizität und Gravitation”

Physikalische Zeitschrift **21**, 1920, p.650

Eine Größe in der Natur kann sich bestimmen durch Beharrung oder durch Einstellung. Beispiel: der Achse eines rotierenden Kreisels kann man eine willkürliche Anfangsrichtung erteilen, diese überträgt sich dann aber, wenn der Kreisel sich selbst überlassen, durch eine von Moment zu Moment wirksame Beharrungstendenz (Parallelverschiebung); hingegen bestimmt sich die Richtung einer Magnetnadel im Magnetfeld durch Einstellung. Während affiner und metrischer Zusammenhang a priori festlegen, wie Vektoren und Strecken sich ändern, wenn sie rein der Beharrungstendenz folgen, bestimmen sich Ladung des Elektrons, Atomfrequenzen und Länge eines Maßstabs durch Einstellung.

Einstein a Weyl, 31 maggio 1918

[...] Könnte man den Herrgott wirklich der Inkonsequenz anklagen, wenn er sich die von Ihnen gefundene Gelegenheit zum Harmonisieren der physikalischen Welt entgehen liess? Ich glaub nicht. In der Falle, dass er die Welt gemäss Ihnen gemacht hätte, wäre nämlich Weyl II. gekommen, um ihn vorwurfsvoll also anzureden:

"Lieber Gott, wenn es schon nicht in Deinem Ratschluss gelegen hat, der Kongruenz unendlich kleiner starrer Körper einen objektiven Sinn zu geben, sodass man, wenn sie voneinander entfernt sind, nicht sagen kann, sie seien kongruent oder sie seien es nicht: warum hast Du Unbegreiflicher dann es nicht verschmäht, dem Winkel diese Eigenschaft zu belassen (bzw. der Aehnlichkeit)? Wenn zwei unendlich kleine, ursprünglich zur Deckung bringbare Körper K, K' nicht mehr zur Deckung gebracht werden können, nachdem K' eine Rundreise durch den Raum gemacht hat, warum sollte bei dieser Rundreise die **Aehnlichkeit** von K und K' gewahrt bleiben? Da erscheint es doch natürlicher, dass die Verwandlung von K' relativ zu K allgemeiner [als] eine affine sei." Weil aber der Herrgott schon vor der Entwicklung der theoretischen Physik gemerkt hat, dass er den Meinungen der Menschen nicht gerecht werden kann, mach er es eben, wie **er** will. [...]

Einstein a Weyl, 3 luglio 1918

[. . .] Jedenfalls gib es bevorzugte Weltlinien, die Wurflinien ungeladenen Körper, andererseits, auch nach Ihrer Theorie, die geodätischen Linien. Sollten diese beiden Sorten einzigartiger Weltlinien nicht identisch sein müssen? Es ist kaum zu bezweifeln. Dann wirken nach Ihrer Theorie auf ungeladene Körper Kräfte, welche den elektromagnetischen **Potentialen** proportional sind. [. . .]

Elettromagnetismo e cariche

- il campo elettromagnetico F dovrebbe piegare le linee d'universo delle **cariche** secondo la '*lex secunda*'

$$\overbrace{\tilde{F}(\dot{\gamma})}^{\text{forza}} = m \cdot \overbrace{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}^{\text{accel.}}$$

dove $\tilde{F}(\dot{\gamma}) = qg^{\sharp}F^{\flat}(\dot{\gamma}) = qg^{-1}(F^{\flat}(\dot{\gamma}), \cdot\,)$ è la forza di Lorentz, q la carica, m la massa ed $F^{\flat}(\dot{\gamma}) = F(\dot{\gamma}, \cdot\,)$

- ma nella TEG, obietta Einstein, $F = dA$ sembra piegare le linee d'universo dei gravi neutri ($q = 0$), mediante il pilotaggio affine dato dalla connessione elettromagneticamente alterata

$$\overline{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \frac{1}{2}(\delta^a_b A_c + \delta^a_c A_b - g_{bc}A^a),$$

dove $A^a = g^{ab}\partial_b(A)$ e $g^{ab} = g^{-1}(dx^a, dx^b)$

Elettromagnetismo e cariche

- il campo elettromagnetico F dovrebbe piegare le linee d'universo delle **cariche** secondo la '*lex secunda*'

$$\overbrace{\tilde{F}(\dot{\gamma})}^{\text{forza}} = m \cdot \overbrace{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}^{\text{accel.}}$$

dove $\tilde{F}(\dot{\gamma}) = qg^{\sharp}F^{\flat}(\dot{\gamma}) = qg^{-1}(F^{\flat}(\dot{\gamma}), \cdot\,)$ è la forza di Lorentz, q la carica, m la massa ed $F^{\flat}(\dot{\gamma}) = F(\dot{\gamma}, \cdot\,)$

- ma nella TEG, obietta Einstein, $F = dA$ sembra piegare le linee d'universo dei gravi neutri ($q = 0$), mediante il pilotaggio affine dato dalla connessione elettromagneticamente alterata

$$\overline{\Gamma}^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} + \frac{1}{2}(\delta^a_b A_c + \delta^a_c A_b - g_{bc}A^a),$$

dove $A^a = g^{ab}\partial_b(A)$ e $g^{ab} = g^{-1}(dx^a, dx^b)$

Weyl (1918-)

Il metodo causale-inerziale

Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all’ontologia di base della relatività generale

Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all'ontologia di base della relatività generale

Alternativa ai regoli e orologi di Einstein

- Weyl rispose anche contrapponendo ai regoli e orologi sui quali aveva tanto insistito Einstein i gravi liberi e raggi di luce del **metodo causale-inerziale**
- regoli rigidi non possono esistere in uno spaziotempo generale, privo di simmetrie inverosimili
- come gli orologi, sono degli oggetti complessi, quantomeccanici e alieni, non appartenenti all'ontologia di base della relatività generale

Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

Gravi liberi e raggi di luce

- per determinare la struttura spaziotemporale, ossia la metrica, Weyl prende
  - **gravi liberi** (più o meno puntiformi, insomma ben circoscritti; non quantomeccanici, ondulatori, estesi)
  - **raggi di luce** (non ondulatori; ‘ottica geometrica’)
- estensione circoscritta per dare varietà unidimensionali (senza parametro) e non ‘tubi d’universo’

Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi** e **non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva

- le tangenti $\dot{\sigma}$ delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot{\sigma})\| = dt(\dot{\sigma}) > \|P_t^{\perp}(\dot{\sigma})\|$$

(dove il proiettore $P_t = \partial_t \, dt(\,\cdot\,)$; le lunghezze $\|\cdot\|$ sono euclidee e l'ortogonalità $\perp$, benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti $\dot{\tau}$ delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot{\tau}, \dot{\tau}) = 0$$

(caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi** e **non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva

- le tangenti $\dot\sigma$ delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot\sigma)\| = dt(\dot\sigma) > \|P_t^{\perp}(\dot\sigma)\|$$

(dove il proiettore $P_t = \partial_t \, dt(\,\cdot\,)$; le lunghezze $\|\cdot\|$ sono euclidee e l'ortogonalità $\perp$, benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti $\dot\tau$ delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot\tau, \dot\tau) = 0$$

(caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

Massa e velocità

- potremmo parlare di **gravi** e **non gravi**; i gravi sono dotati di massa mentre la luce è ciò che ne è priva

- le tangenti $\dot\sigma$ delle linee d'universo dei gravi sono di tipo tempo, cioè soddisfano

$$\|P_t(\dot\sigma)\| = dt(\dot\sigma) > \|P_t^{\perp}(\dot\sigma)\|$$

  (dove il proiettore $P_t = \partial_t \, dt(\,\cdot\,)$; le lunghezze $\|\cdot\|$ sono euclidee e l'ortogonalità $\perp$, benché minkowskiana, non dipende dalla segnatura adottata)

- le tangenti $\dot\tau$ delle linee d'universo luminose sono invece nulle, cioè soddisfano

$$g(\dot\tau, \dot\tau) = 0$$

  (caratterizzazione altrettanto indipendente dalla segnatura)

Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**
- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche
- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variable)

Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**

- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche

- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variable)

Pilotaggio puramente affine (assenza di forze)

- per “liberi” s’intende **soggetti solo al pilotaggio della struttura spaziotemporale e non anche ad altre influenze (‘forze’)**

- quindi non si tratta di cariche soggette a deflessioni elettromagnetiche

- servono raggi di luce altrettanto ‘liberi,’ che vengono solo rifratti (anzi diretti) dal campo affine, e non dai rallentamenti imposti da un ulteriore mezzo fisico (a indice di rifrazione variable)

Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- dànno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b \tag{2}$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \sum_d \left\{ \frac{\delta^a_b}{(n+1)} \Gamma^d_{dc} - \frac{\delta^a_c}{(n+1)} \Gamma^d_{db} \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- dànno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b \tag{2}$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \sum_d \left\{ \frac{\delta^a_b}{(n+1)} \Gamma^d_{dc} - \frac{\delta^a_c}{(n+1)} \Gamma^d_{db} \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- dànno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b \tag{2}$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \sum_d \left\{ \frac{\delta^a_b}{(n+1)} \Gamma^d_{dc} - \frac{\delta^a_c}{(n+1)} \Gamma^d_{db} \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- dànno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b \tag{2}$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \sum_d \left\{ \frac{\delta^a_b}{(n+1)} \Gamma^d_{dc} - \frac{\delta^a_c}{(n+1)} \Gamma^d_{db} \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

Struttura proiettiva

- le linee d'universo dei gravi liberi saranno geodetiche di tipo tempo **senza parametro** (per fornire il quale servirebbe un orologio regolare)
- dànno la struttura proiettiva, che Weyl caratterizza per astrazione dalla struttura affine
- connessioni affini proiettivamente equivalenti differiscono per

$$[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b \tag{2}$$

- tali connessioni hanno le stesse geodetiche a meno di riparametrizzazioni
- la **connessione proiettiva**

$$\Pi^a_{bc} = \Gamma^a_{bc} - \sum_d \left\{ \frac{\delta^a_b}{(n+1)} \Gamma^d_{dc} - \frac{\delta^a_c}{(n+1)} \Gamma^d_{db} \right\},$$

essendo insensibile alle riparametrizzazioni, rappresenta tutta la classe (2)

Struttura conforme

- la luce dà invece la struttura conforme, che determina la metrica a meno di un fattore conforme e^{λ}
- siccome la metrica determina una connessione affine (simmetrica, 'di Levi-Civita'), la luce dà la struttura affine a meno di un termine

$$[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a), \tag{3}$$

che rappresenta la differenza tra due connessioni conformemente equivalenti

Struttura conforme

- la luce dà invece la struttura conforme, che determina la metrica a meno di un fattore conforme e^λ
- siccome la metrica determina una connessione affine (simmetrica, 'di Levi-Civita'), la luce dà la struttura affine a meno di un termine

$$[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a), \tag{3}$$

che rappresenta la differenza tra due connessioni conformemente equivalenti

Conto

- la metrica g_{ir} determina la connessione (simmetrica) Γ^i_{jk} mediante

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_r g^{ir} \left(g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r} \right)$$

- ricalibrando secondo $g_{ir} \mapsto \overline{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$ (e quindi $g^{ir} \mapsto \overline{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$) otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_r g^{ir} \{ \partial_k (e^\lambda g_{rj}) + \partial_j (e^\lambda g_{rk}) - \partial_r (e^\lambda g_{jk}) \} \\ &= \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2} \left(\delta^i_j \partial_k \lambda + \delta^i_k \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right) \end{aligned}$$

- le $\varphi_k = \partial_k \lambda$ saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle φ_k **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

Conto

- la metrica g_{ir} determina la connessione (simmetrica) Γ^i_{jk} mediante

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\sum_r g^{ir}(g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r})$$

- ricalibrando secondo $g_{ir} \mapsto \overline{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$ (e quindi $g^{ir} \mapsto \overline{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$) otteniamo

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{e^{-\lambda}}{2}\sum_r g^{ir}\{\partial_k(e^\lambda g_{rj}) + \partial_j(e^\lambda g_{rk}) - \partial_r(e^\lambda g_{jk})\} \\ &= \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\left(\delta^i_j\partial_k\lambda + \delta^i_k\partial_j\lambda - \sum_r g^{ir}g_{jk}\partial_r\lambda\right)\end{aligned}$$

- le $\varphi_k = \partial_k\lambda$ saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle φ_k **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

Conto

- la metrica g_{ir} determina la connessione (simmetrica) Γ^i_{jk} mediante

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_r g^{ir} (g_{rj,k} + g_{rk,j} - g_{jk,r})$$

- ricalibrando secondo $g_{ir} \mapsto \overline{g}_{ir} = e^\lambda g_{ir}$ (e quindi $g^{ir} \mapsto \overline{g}^{ir} = e^{-\lambda} g^{ir}$) otteniamo

$$\begin{aligned} \overline{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{e^{-\lambda}}{2} \sum_r g^{ir} \{\partial_k (e^\lambda g_{rj}) + \partial_j (e^\lambda g_{rk}) - \partial_r (e^\lambda g_{jk})\} \\ &= \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2} \left(\delta^i_j \partial_k \lambda + \delta^i_k \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right) \end{aligned}$$

- le $\varphi_k = \partial_k \lambda$ saranno però le componenti di una 1-forma **esatta**; non mi risulta che delle φ_k **arbitrarie** siano necessariamente compensabili ricalibrando la metrica

Conto (λ)

- ricalibrando secondo $g_{ir} \mapsto \overline{g}_{ir} = \lambda g_{ir}$ (e quindi $g^{ir} \mapsto \overline{g}^{ir} = g^{ir}/\lambda$) otterremmo invece

$$
\begin{aligned}
\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{\partial_k(\lambda g_{rj}) + \partial_j(\lambda g_{rk}) - \partial_r(\lambda g_{jk})\} \\
&= \frac{1}{2\lambda} \sum_r g^{ir} \{\lambda(g_{rj,k} + g_{rk,j} + g_{jk,r}) + g_{rj}\partial_k\lambda + g_{rk}\partial_j\lambda - g_{jk}\partial_r\lambda\} \\
&= \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2\lambda} \left(\delta^i_j \partial_k \lambda + \delta^i_k \partial_j \lambda - \sum_r g^{ir} g_{jk} \partial_r \lambda \right)
\end{aligned}
$$

- ponendo $\varphi_k = \frac{1}{\lambda}\partial_k\lambda$ otteniamo (3)

Conto (λ)

- ricalibrando secondo $g_{ir} \mapsto \overline{g}_{ir} = \lambda g_{ir}$ (e quindi $g^{ir} \mapsto \overline{g}^{ir} = g^{ir}/\lambda$) otterremmo invece

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma}^i_{jk} &= \frac{1}{2\lambda}\sum_r g^{ir}\{\partial_k(\lambda g_{rj}) + \partial_j(\lambda g_{rk}) - \partial_r(\lambda g_{jk})\} \\ &= \frac{1}{2\lambda}\sum_r g^{ir}\{\lambda(g_{rj,k} + g_{rk,j} + g_{jk,r}) + g_{rj}\partial_k\lambda + g_{rk}\partial_j\lambda - g_{jk}\partial_r\lambda\} \\ &= \Gamma^i_{jk} + \frac{1}{2\lambda}\left(\delta^i_j\partial_k\lambda + \delta^i_k\partial_j\lambda - \sum_r g^{ir}g_{jk}\partial_r\lambda\right)\end{aligned}$$

- ponendo $\varphi_k = \frac{1}{\lambda}\partial_k\lambda$ otteniamo (3)

"Zur Infinitesimalgeometrie ..."

Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wiss. ..., 1921, p.100

In der Relativitätstheorie haben projektive und konforme Beschaffenheit eine unmittelbar anschauliche Bedeutung. Die erstere, die Beharrungstendenz der Weltrichtungen eines sich bewegenden materiellen Teilchens, welche ihm, wenn es in Bestimmter Weltrichtung losgelassen ist, eine bestimmte "natürliche" Bewegung aufnötigt, ist jene Einheit von Trägheit und Gravitation, welche Einstein an Stelle beider setzte, für die es aber bislang an einem suggestiven Namen mangelt. Der infinitesimale Kegel $g_{ik}dx^i dx^k = 0$ aber vollzieht in der Nachbarschaft eines Weltpunktes die Scheidung von Vergangenheit und Zukunft; die konforme Beschaffenheit ist der Wirkungszusammenhang der Welt, durch den bestimmt wird, welche Weltpunkte miteinander in möglicher kausaler Verbindung stehen.

Curvatura proiettiva

- Weyl definisce la *Projektivkrümmung*, misurata dal tensore

$$P^a_{bcd} = R^a_{bcd} - H^a_{bcd}$$

invariante rispetto alle trasformazioni proiettive

$$\Gamma^a_{bc} \mapsto \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$$

- H^a_{bcd} è la parte del tensore di Riemann R^a_{bcd} che invece è sensibile alla riparametrizzazione delle geodetiche (della relativa connessione affine)

Curvatura proiettiva

- Weyl definisce la *Projektivkrümmung*, misurata dal tensore

$$P^a_{bcd} = R^a_{bcd} - H^a_{bcd}$$

invariante rispetto alle trasformazioni proiettive

$$\Gamma^a_{bc} \mapsto \Gamma^a_{bc} + \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$$

- H^a_{bcd} è la parte del tensore di Riemann R^a_{bcd} che invece è sensibile alla riparametrizzazione delle geodetiche (della relativa connessione affine)

Curvatura conforme

- definisce inoltre la *Konformkrümmung*, misurata dal tensore detto ormai 'di Weyl'

$$C^a_{bcd} = R^a_{bcd} - B^a_{bcd},$$

invariante rispetto alle ricalibrazioni $g \mapsto e^\lambda g$, ossia alle trasformazioni conformi

$$\Gamma^a_{bc} \mapsto \Gamma^a_{bc} + \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$$

- B^a_{bcd} (funzione semplice del tensore di Ricci $R_{bc} = R^a_{bac}$; $R_{bc} = 0 \Rightarrow R^a_{bcd} = C^a_{bcd}$) è la parte del tensore di Riemann R^a_{bcd} che invece è sensibile alla ricalibrazione della metrica
(le onde gravitazionali si propagano in regioni riccipiatte in cui la curvatura è tutta conforme)

Curvatura conforme

- definisce inoltre la *Konformkrümmung*, misurata dal tensore detto ormai 'di Weyl'

$$C^a_{bcd} = R^a_{bcd} - B^a_{bcd},$$

invariante rispetto alle ricalibrazioni $g \mapsto e^\lambda g$, ossia alle trasformazioni conformi

$$\Gamma^a_{bc} \mapsto \Gamma^a_{bc} + \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$$

- B^a_{bcd} (funzione semplice del tensore di Ricci $R_{bc} = R^a_{bac}$; $R_{bc} = 0 \Rightarrow R^a_{bcd} = C^a_{bcd}$) è la parte del tensore di Riemann R^a_{bcd} che invece è sensibile alla ricalibrazione della metrica
(le onde gravitazionali si propagano in regioni riccipiatte in cui la curvatura è tutta conforme)

Altre due curvature

- aggiungo (solo per completezza, non serviranno nel seguito) che Weyl definisce anche la *Richtungskrümmung* $\overline{R}^a_{bcd}$ e la *Längenkrümmung* F_{cd}, che soddisfano

$$R^a_{bcd} = \overline{R}^a_{bcd} - \frac{1}{2}\delta^a_b F_{cd}$$

- la *Längenkrümmung* non è altro che il rotore $F = dA$ (il quale diventerà la 2-forma di Faraday nella TEG) della 1-forma ricalibrante

Dann und nur dann, wenn die durch Parallelverschiebung eines Vektors vollzogene Richtungsübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor $\overline{R}$ der Richtungskrümmung; dann und nur dann, wenn die ebenso vollzogene Längenübertragung integrabel ist, verschwindet der Tensor F der Längenkrümmung.

- $R^a_{bcd} = \overline{R}^a_{bcd}$ se la 1-forma dilatante (il quadripotenziale elettromagnetico nella TEG) è esatta, e solo allora; $C^a_{bcd} = 0 \Rightarrow F_{ab} = 0$ ma non viceversa

Teorema di Weyl

Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme $\{e^\lambda g\}$ ottenuta variando λ fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva P^a_{bcd} e la curvatura conforme C^a_{bcd} insieme determinano la curvatura R^a_{bcd} e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per $\delta^a_b\psi_c + \delta^a_c\psi_b$ e la classe di connessioni che differiscono per $\frac{1}{2}(\delta^a_b\varphi_c + \delta^a_c\varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ insieme fissano la connessione Γ^a_{bc} e pertanto la metrica

Teorema di Weyl

Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme $\{e^\lambda g\}$ ottenuta variando λ fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva P^a_{bcd} e la curvatura conforme C^a_{bcd} insieme determinano la curvatura R^a_{bcd} e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per $\delta^a_b\psi_c + \delta^a_c\psi_b$ e la classe di connessioni che differiscono per $\frac{1}{2}(\delta^a_b\varphi_c + \delta^a_c\varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ insieme fissano la connessione Γ^a_{bc} e pertanto la metrica

Teorema di Weyl

Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme $\{e^\lambda g\}$ ottenuta variando λ fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva P^a_{bcd} e la curvatura conforme C^a_{bcd} insieme determinano la curvatura R^a_{bcd} e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per $\delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$ e la classe di connessioni che differiscono per $\frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ insieme fissano la connessione Γ^a_{bc} e pertanto la metrica

Teorema di Weyl

Projektive und konforme Beschaffenheit eines metrischen Raums bestimmen dessen Metrik eindeutig.

- ossia la classe conforme $\{e^{\lambda}g\}$ ottenuta variando λ fissa le parametrizzazioni delle geodetiche proiettive (rendendole affini)
- ossia la curvatura proiettiva P^{a}_{bcd} e la curvatura conforme C^{a}_{bcd} insieme determinano la curvatura R^{a}_{bcd} e quindi anche la metrica
- ossia la classe di connessioni che differiscono per $\delta^{a}_{b}\psi_{c} + \delta^{a}_{c}\psi_{b}$ e la classe di connessioni che differiscono per $\frac{1}{2}(\delta^{a}_{b}\varphi_{c} + \delta^{a}_{c}\varphi_{b} - g_{bc}\varphi^{a})$ insieme fissano la connessione Γ^{a}_{bc} e pertanto la metrica

Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla

- per esprimere l'effetto della libertà conforme $[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ sul vettore normalizzato $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$ possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2}\varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2}\varphi^\sharp,$$

  dove $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$ e $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot)$

- per la libertà proiettiva $[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$ abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2\langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla

- per esprimere l'effetto della libertà conforme $[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ sul vettore normalizzato $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$ possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2}\varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2}\varphi^\sharp,$$

  dove $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$ e $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot\,)$

- per la libertà proiettiva $[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$ abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2\langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

Dimostrazione

- Weyl dimostra che la libertà conforme non può coesistere con la libertà proiettiva; se libertà conforme fosse anche proiettiva sarebbe nulla

- per esprimere l'effetto della libertà conforme $[\Gamma^a_{bc}] = \frac{1}{2}(\delta^a_b \varphi_c + \delta^a_c \varphi_b - g_{bc}\varphi^a)$ sul vettore normalizzato $\xi^a = \langle dx^a, \xi \rangle$ possiamo scrivere:

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = \sum_c \xi^a \varphi_c \xi^c - \frac{1}{2}\varphi^a \leftrightarrow \langle \varphi, \xi \rangle \cdot \xi - \frac{1}{2}\varphi^\sharp,$$

  dove $\varphi_a = \langle \varphi, \partial_a \rangle$ e $\varphi^\sharp = g^\sharp(\varphi) = g^{-1}(\varphi, \cdot\,)$

- per la libertà proiettiva $[\Gamma^a_{bc}] = \delta^a_b \psi_c + \delta^a_c \psi_b$ abbiamo invece

$$\sum_{bc} [\Gamma^a_{bc}] \xi^b \xi^c = 2 \sum_c \xi^a \psi_c \xi^c \leftrightarrow 2\langle \psi, \xi \rangle \cdot \xi$$

Dimostrazione (resto)

- facendo coincidere le due libertà possiamo scrivere

$$\overbrace{2\langle\psi,\xi\rangle\cdot\xi}^{\text{proiettiva}} = \overbrace{\langle\varphi,\xi\rangle\cdot\xi-\varphi^\sharp/2}^{\text{conforme}}\,,$$

  oppure, per vettori ξ ed η (normalizzati ma non collineari),

$$\varphi^\sharp = 2(\langle\varphi,\xi\rangle - 2\langle\psi,\xi\rangle)\cdot\xi = 2(\langle\varphi,\eta\rangle - 2\langle\psi,\eta\rangle)\cdot\eta,$$

  eguaglianza che elimina entrambe le libertà imponendo $\varphi=\psi=0$

Kennen wir also die Weltlinien zweien O passierenden, nur unter dem Einfluß des Führungsfeldes sich bewegenden Massenpunkte, so ist neben der quadratischen auch die lineare Fundamentalform in O eindeutig bestimmt.

“Zur Infinitesimalgeometrie . . . ”

Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wiss. . . . , 1921, p.100

Es geht aus diesem Satz hervor, daß allein durch die Beobachtung der “natürlichen” Bewegung materieller Teilchen und der Wirkungs-, insbesondere der Licht-Ausbreitung die Weltmetrik festgelegt werden kann; Maßstäbe und Uhren sind nicht dazu erforderlich.

Mathematische Analyse des Raumproblems

Berlino, Springer, 1923, p.19

Ist es uns in der wirklichen Welt also möglich, die Wirkungsausbreitung, insbesondere die Lichtausbreitung zu verfolgen, und vermögen wir außerdem die Bewegung freier Massenpunkte, welche dem Führungsfelde folgen, als solche zu erkennen und zu beobachten, so können wir daraus allein, ohne Zuhilfenahme von Uhren und starren Maßstäben, das metrische Feld ablesen.