Comment Weyl tomba sur l'électromagnétisme en poursuivant la justice mathématique

Alexander Afriat
Istituto di Filosofia
Università di Urbino

Septième congrès de la Société italienne d'histoire des mathématiques
Paris, 25-27 octobre 2007

Table des matières

Introduction

Thèse

- Weyl unifia gravitation et électromagnétisme par hasard en poursuivant l'‘équilibre mathématique,’ ou plutôt la ‘justice mathématique’ : en attribuant les mêmes droits, les mêmes libertés, à direction et longueur

The reign of relativity

- inspiré par et fondé sur

  The reign of relativity : Philosophy in physics 1915-1925
  (Oxford University Press 2005)

  de Thomas Ryckman

- mais je propose une reconstruction différente de l'unification fortuite de gravitation et électricité

The reign of relativity

- inspiré par et fondé sur

  The reign of relativity : Philosophy in physics 1915-1925
  (Oxford University Press 2005)

  de Thomas Ryckman

- mais je propose une reconstruction différente de l'unification fortuite de gravitation et électricité

Par hasard

Unification fortuite

- on soutient presque toujours (Folland, Trautman, Yang, Perlick, Vizgin l'ont fait entre autres) que c'est **sciemment** que Weyl unifia gravitation et électricité

- mais comme Ryckman l'a justement soutenu, l'unification s'est faite de façon **fortuite**

- les deux prochains écrans le montrent

Unification fortuite

- on soutient presque toujours (Folland, Trautman, Yang, Perlick, Vizgin l'ont fait entre autres) que c'est **sciemment** que Weyl unifia gravitation et électricité

- mais comme Ryckman l'a justement soutenu, l'unification s'est faite de façon **fortuite**

- les deux prochains écrans le montrent

Unification fortuite

- on soutient presque toujours (Folland, Trautman, Yang, Perlick, Vizgin l'ont fait entre autres) que c'est **sciemment** que Weyl unifia gravitation et électricité

- mais comme Ryckman l'a justement soutenu, l'unification s'est faite de façon **fortuite**

- les deux prochains écrans le montrent

“Gravitation und Elektrizität”

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918, p.465

Indem man die erwähnte Inkonsequenz beseitigt, kommt eine Geometrie zustande, die überraschenderweise, auf die Welt angewendet, **nicht nur die Gravitationserscheinungen, sondern auch die des elektromagnetischen Feldes erklärt**.

Weyl à Einstein, 10 Décembre 1918

Übrigens müssen Sie nicht glauben, daß ich von der Physik her dazu gekommen bin, neben der quadratische noch die lineare Differentialform in die Geometrie einzuführen ; sondern ich wollte wirklich diese “Inkonsequenz,” die mir schon immer ein Dorn im Auge gewesen war, endlich einmal beseitigen und bemerkte dann zu meinem eigenen Erstaunen : das sieht so aus, als erklärt es die Elektrizität.

Deux candidats

- l'unification était donc imprévue, sortant de considérations aprioriques

- mais il reste tout de même deux possibilités

    1. la justice mathématique : la parité de direction et longueur

    2. le 'programme infinitésimal' que Ryckman fait remonter à Husserl

Deux candidats

- l'unification était donc imprévue, sortant de considérations aprioriques

- mais il reste tout de même deux possibilités

  1. la justice mathématique : la parité de direction et longueur
  2. le ‘programme infinitésimal’ que Ryckman fait remonter à Husserl

Deux candidats

- l'unification était donc imprévue, sortant de considérations aprioriques

- mais il reste tout de même deux possibilités

  1. la justice mathématique : la parité de direction et longueur
  2. le 'programme infinitésimal' que Ryckman fait remonter à Husserl

Deux candidats

- l'unification était donc imprévue, sortant de considérations aprioriques

- mais il reste tout de même deux possibilités

  1. la justice mathématique : la parité de direction et longueur
  2. le 'programme infinitésimal' que Ryckman fait remonter à Husserl

Le programme infinitésimal

- le programme infinitésimal apparaît, dans le ‘contexte de la découverte,’ comme quelques intimations vagues et immotivées

- deux passages (prochains écrans) qui donnent corps au programme en fournissant fondements et motivation épistémologique appartiennent cependant à un ‘contexte de la justification’ postérieur : 1927, 1931

Le programme infinitésimal

- le programme infinitésimal apparaît, dans le ‘contexte de la découverte,’ comme quelques intimations vagues et immotivées

- deux passages (prochains écrans) qui donnent corps au programme en fournissant fondements et motivation épistémologique appartiennent cependant à un ‘contexte de la justification’ postérieur : 1927, 1931

Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft
Munich, Oldenbourg, 1927, p.98

Erkennt man neben dem physischen einen **Anschauungsraum** an und behauptet von ihm, daß seine Maßstruktur aus Wesensgründen die euklidischen Gesetze erfülle, so steht dies mit der Physik nicht in Widerspruch, sofern sie an der euklidischen Beschaffenheit der **unendlich kleinen Umgebung** eines punktes O (in dem sich das Ich momentan befindet) festhält [...]. Aber man muß dann zugeben, daß die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ichzentrum entfernt. Er ist einer Tangentenebene zu vergleichen, die im Punkte O an eine krumme Fläche, den physischen Raum, gelegt ist : in der unmittelbaren Umgebung von O decken sich beide, aber je weiter man sich von O entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Ebene und Fläche.

“Geometrie und Physik”
Die Naturwissenschaften **19**, 1931, p.52

Die Philosophen mögen recht haben, daß unser Anschauungsraum, gleichgültig, was die physikalische Erfahrung sagt, euklidische Struktur trägt. Nur bestehe ich allerdings dann darauf, daß zu diesem Anschauungsraum das Ich-Zentrum gehört und daß die Koinzidenz, die Beziehung des Anschauungsraumes auf den physischen um so vager wird, je weiter man sich vom Ich-Zentrum entfernt. In der theoretischen Konstruktion spiegelt sich das wider in dem Verhältnis zwischen der krummen Fläche und ihrer Tangentenebene im Punkte P : beide decken sich in der unmittelbaren Umgebung des Zentrums P, aber je weiter man sich von P entfernt, um so willkürlicher wird die Fortsetzung dieser Deckbeziehung zu einer eindeutigen Korrespondenz zwischen Fläche und Ebene.

Direction et longueur

Pourquoi préférer la justice mathématique ?

- l’‘épistemologie locale’ ou ‘téléscepticisme’ que Ryckman fait remonter à Husserl pourrait être fruit de la théorie plutôt que ses racines

- le ‘programme infinitésimal’ est trop vague et insubstantiel, comme il apparaît en 1918 (quelques adombrations immotivées), pour suffir logiquement

- étonnemment, la justice mathématique **est logiquement suffisante** : l’électromagnétisme (loin des sources—en tout cas jusqu’à la dualité de Hodge) sort directement, par quelques étapes naturelles et simples, de la justice mathématique

- le dévelopement formel est manifestement guidé, comme nous le verrons, par la parité de direction et longueur

- en outre la **dualité entre coordonnées et jauge**, que Weyl pose plusieurs fois, peut être interprétée comme dualité entre direction et longueur

Pourquoi préférer la justice mathématique ?

- l'‘épistemologie locale’ ou ‘téléscepticisme’ que Ryckman fait remonter à Husserl pourrait être fruit de la théorie plutôt que ses racines

- le ‘programme infinitésimal’ est trop vague et insubstantiel, comme il apparaît en 1918 (quelques adombrations immotivées), pour suffir logiquement

- étonnemment, la justice mathématique **est logiquement suffisante** : l'électromagnétisme (loin des sources—en tout cas jusqu'à la dualité de Hodge) sort directement, par quelques étapes naturelles et simples, de la justice mathématique

- le dévelopement formel est manifestement guidé, comme nous le verrons, par la parité de direction et longueur

- en outre la **dualité entre coordonnées et jauge**, que Weyl pose plusieurs fois, peut être interprétée comme dualité entre direction et longueur

Pourquoi préférer la justice mathématique ?

- l'‘épistemologie locale' ou ‘téléscepticisme' que Ryckman fait remonter à Husserl pourrait être fruit de la théorie plutôt que ses racines
- le ‘programme infinitésimal' est trop vague et insubstantiel, comme il apparaît en 1918 (quelques adombrations immotivées), pour suffir logiquement
- étonnemment, la justice mathématique **est logiquement suffisante** : l'électromagnétisme (loin des sources—en tout cas jusqu'à la dualité de Hodge) sort directement, par quelques étapes naturelles et simples, de la justice mathématique
- le dévelopement formel est manifestement guidé, comme nous le verrons, par la parité de direction et longueur
- en outre la **dualité entre coordonnées et jauge**, que Weyl pose plusieurs fois, peut être interprétée comme dualité entre direction et longueur

Pourquoi préférer la justice mathématique ?

- l'‘épistemologie locale’ ou ‘téléscepticisme’ que Ryckman fait remonter à Husserl pourrait être fruit de la théorie plutôt que ses racines

- le ‘programme infinitésimal’ est trop vague et insubstantiel, comme il apparaît en 1918 (quelques adombrations immotivées), pour suffir logiquement

- étonnemment, la justice mathématique **est logiquement suffisante** : l'électromagnétisme (loin des sources—en tout cas jusqu'à la dualité de Hodge) sort directement, par quelques étapes naturelles et simples, de la justice mathématique

- le dévelopement formel est manifestement guidé, comme nous le verrons, par la parité de direction et longueur

- en outre la **dualité entre coordonnées et jauge**, que Weyl pose plusieurs fois, peut être interprétée comme dualité entre direction et longueur

Pourquoi préférer la justice mathématique ?

- l'‘épistemologie locale’ ou ‘téléscepticisme’ que Ryckman fait remonter à Husserl pourrait être fruit de la théorie plutôt que ses racines
- le ‘programme infinitésimal’ est trop vague et insubstantiel, comme il apparaît en 1918 (quelques adombrations immotivées), pour suffir logiquement
- étonnemment, la justice mathématique **est logiquement suffisante** : l'électromagnétisme (loin des sources—en tout cas jusqu'à la dualité de Hodge) sort directement, par quelques étapes naturelles et simples, de la justice mathématique
- le dévelopement formel est manifestement guidé, comme nous le verrons, par la parité de direction et longueur
- en outre la **dualité entre coordonnées et jauge**, que Weyl pose plusieurs fois, peut être interprétée comme dualité entre direction et longueur

“Gravitation und Elektrizität”

Sitzungsber. d. K. Preuß. Akad. d. Wissenschaften 1918

Die auftretenden Formeln müssen dementsprechend eine doppelte Invarianzeigenschaft besitzen : 1. sie müssen **invariant** sein **gegenüber beliebigen stetigen Koordinatentransformationen**, 2. sie müssen ungeändert bleiben, **wenn man die g_{ik} durch λg_{ik} ersetzt**, wo λ eine willkürliche stetige Ortsfunktion ist.

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.396

Zum Zwecke der analytischen Darstellung denken wir uns 1. ein bestimmtes Koordinatensystem und 2. den an jeder Stelle willkürlich zu wählenden Proportionalitätsfaktor im skalaren Produkt festgelegt ; damit ist ein “**Bezugssystem**”[9] für die analytische Darstellung gewonnen. [. . .]

⋮

9. Ich unterscheide also zwischen “Koordinatensystem” und “Bezugssystem.”

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.398

In alle Größen oder Beziehungen, welche metrische Verhältnisse analytisch darstellen, müssen demnach die Funktionen g_{ik}, φ_i in solcher Weise eingehen, daß Invarianz stattfindet 1. gegenüber einer beliebigen Koordinatentransformation (“Koordinaten-Invarianz”) und 2. gegenüber der Ersetzung von (7) durch (8) (“Maßstab-Invarianz”).

“Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie
Annalen der Physik **59**, 1919, p.101

Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf **Koordinaten** bezogen sein und müssen 2. gewisse **Maßeinheiten** festgelegt werden. Die bisherige Einsteinsche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems ; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheit, zu gewinnen.

Coordonnées jusqu'à la jauge

- la dualité coordonnées/jauge, que Weyl pose avec tant d'insistance, peut être vue come dualité direction/longueur

- les coordonnées, jusqu'à la recalibration, ne donnent que la direction

- un système de coordonnées x^a attribue à chaque point $P \in M$ une base $\partial_a \in T_P M$, et une base duale

$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T_P^* M$$

qui fournit les composantes $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ de tout vecteur $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Coordonnées jusqu'à la jauge

- la dualité coordonnées/jauge, que Weyl pose avec tant d'insistance, peut être vue come dualité direction/longueur

- les coordonnées, jusqu'à la recalibration, ne donnent que la direction

- un système de coordonnées x^a attribue à chaque point $P \in M$ une base $\partial_a \in T_P M$, et une base duale

$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T_P^* M$$

qui fournit les composantes $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ de tout vecteur $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Coordonnées jusqu'à la jauge

- la dualité coordonnées/jauge, que Weyl pose avec tant d'insistance, peut être vue come dualité direction/longueur

- les coordonnées, jusqu'à la recalibration, ne donnent que la direction

- un système de coordonnées x^a attribue à chaque point $P \in M$ une base $\partial_a \in T_P M$, et une base duale

$$dx^a = g^\flat(\partial_a) = g(\partial_a, \cdot\,) \in T_P^* M$$

  qui fournit les composantes $V^a = \langle dx^a, V \rangle$ de tout vecteur $V \in T_P M$; $a = 0, \ldots, 3$

Coordonnées et direction

- une transformation de jauge $g \mapsto e^{2\lambda} g$ induit une transformation $V \mapsto e^{\lambda} V$, ou $V^a \mapsto e^{\lambda} V^a$, à travers

$$e^{2\lambda} g(V,V) = g(e^{\lambda} V, e^{\lambda} V) = \sum_{ab} g(e^{\lambda}\partial_a, e^{\lambda}\partial_b) V^a V^b = \sum_{ab} g(\partial_a, \partial_b) e^{\lambda} V^a e^{\lambda} V^b$$

- la direction, donnée par les rapports

$$e^{\lambda} V^0 : e^{\lambda} V^1 : e^{\lambda} V^2 : e^{\lambda} V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

demeure inchangée

Coordonnées et direction

- une transformation de jauge $g \mapsto e^{2\lambda} g$ induit une transformation $V \mapsto e^{\lambda} V$, ou $V^a \mapsto e^{\lambda} V^a$, à travers

  $$e^{2\lambda} g(V, V) = g(e^{\lambda} V, e^{\lambda} V) = \sum_{ab} g(e^{\lambda}\partial_a, e^{\lambda}\partial_b) V^a V^b = \sum_{ab} g(\partial_a, \partial_b) e^{\lambda} V^a e^{\lambda} V^b$$

- la direction, donnée par les rapports

  $$e^{\lambda} V^0 : e^{\lambda} V^1 : e^{\lambda} V^2 : e^{\lambda} V^3 = V^0 : V^1 : V^2 : V^3,$$

  demeure inchangée

Analogie

DIRECTION	**LONGUEUR**
coordonnées (jusqu'à la jauge)	jauge
transport parallèle	transport congruent
gravitation	électricité
connection de Levi-Civita Γ^a_{bc}	connection de longueur A
$\delta V^a = -\Gamma^a_{bc} X^b V^c$	$\delta l = -\langle \alpha, X \rangle = -A_b X^b l$
courbure de direction R^a_{bcd} (de Γ^a_{bc})	courbure de longueur $F = dA$
coordonnées géodésiques y^a (à P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	jauge géodésique (à P) $A' = A + d\lambda = 0$
principe d'équivalence : $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	principe d'équival. : $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogie **détermina** la TEG

Analogie

$\boxed{\textbf{DIRECTION}}$	$\boxed{\textbf{LONGUEUR}}$
coordonnées (jusqu'à la jauge)	jauge
transport parallèle	transport congruent
gravitation	électricité
connection de Levi-Civita Γ^a_{bc}	connection de longueur A
$\delta V^a = -\Gamma^a_{bc} X^b V^c$	$\delta l = -\langle \alpha, X \rangle = -A_b X^b l$
courbure de direction R^a_{bcd} (de Γ^a_{bc})	courbure de longueur $F = dA$
coordonnées géodésiques y^a (à P): $\Gamma^a_{bc} = 0$	jauge géodésique (à P) $A' = A + d\lambda = 0$
principe d'équivalence : $\ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c \mapsto \ddot{y}^a$	principe d'équival. : $\alpha = -lA \mapsto \alpha' = 0$

- l'analogie **détermina** la TEG

“Nozione di parallèleismo in una varietà qualunque . . . ”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.173

L’incontro, anzi il maneggio continuativo di tali simboli [di Riemann] in questioni di così alto interesse generale mi ha condotto a ricercare se non sia possibile ridurre alquanto l’apparato formale che serve abitualmente ad introdurli e a stabilirne il comportamento covariante. Un perfezionamento in proposito è effettivamente possibile [. . .] venne via via ampliandosi per far debito posto anche all’interpretazione geometrica. In sulle prime avevo creduto di trovarla senz’altro nei lavori originali di Riemann [. . .] ; ma ce n’è appena un embrione. [. . .] D’altra parte non c’è traccia [. . .] di quelle specificazioni (nozione di direzioni parallèlee in una varietà qualunque [. . .]) che riconosceremo indispensabili dal punto di vista geometrico.

“Nozione di parallèleismo in una varietà qualunque ...”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[...] cercando di caratterizzare il parallèleismo di due direzioni (α), (α') uscenti da due punti vicinissimi P e P'. All’uopo si ricorda che qualunque varietà V_n si può risguardare immersa in uno spazio euclideo S_n a un numero abbastanza elevato N di dimensioni, e si rileva anzitutto che, immaginando spiccata da P una generica direzione (f) di S_n, il parallèleismo ordinario in tale spazio richiederebbe

$$\text{angolo}\widehat{(f)(\alpha)} = \text{angolo}\widehat{(f)(\alpha')},$$

per qualunque (f). Orbene, il parallèleismo in V_n si definisce, limitandosi ad esigere che la condizione sia soddisfatta **per tutte le (f) appartenenti a** V_n (ossia alla giacitura di S_N tangente in P a V_n).

“Nozione di parallèleismo in una varietà qualunque …”

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[seguito] A giustificazione di tale definizione va notato che, mentre essa riproduce, come è necessario, il comportamento per le V_n euclidee, ha in ogni caso carattere intrinseco, perché in definitiva risulta dipendente soltanto dalla metrica di V_n, e non anche dall'ausiliario spazio ambiente S_N. Infatti la traduzione analitica della nostra definizione di parallèleismo si concreta come segue : Riferita la V_n a coordinate generali x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, siano dx_i gli incrementi corrispondenti al passaggio da P a P' ; $\xi^{(i)}$ i parametri spettanti a una generica direzione (α) uscente da P ; $\xi^{(i)} + d\xi^{(i)}$ quelli spettanti ad una direzione infinitamente vicina (α'), spiccata da P'. La condizione di parallèleismo è espressa dalle n equazioni

$$d\xi^{(i)} + \sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {jl \atop i} \right\} dx_j \, \xi^{(l)} = 0 \tag{1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, designando $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ i noti simboli di Christoffel.

“Nozione di parallèleismo in una varietà qualunque …”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.174

[seguito] Una volta acquisita la legge con cui si passa da un punto a un punto infinitamente vicino, si è senz’altro in grado di eseguire il trasporto di direzioni parallèlee lungo una qualsiasi curva C. Se $x_i = x_i(s)$ ne costituiscono le equazioni parametriche, basta evidentemente risguardare, nelle (1), le x_i e subordinatamente le $\left\{ {jl \atop i} \right\}$ come funzioni assegnate, le $\xi^{(i)}$ come funzioni da determinarsi del parametro s, e si ha il sistema lineare ordinario

$$\frac{d\xi^{(i)}}{ds} + \sum_{j,l=1}^{n} \left\{ {jl \atop i} \right\} \frac{dx_j}{ds}\, \xi^{(l)} = 0$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$, riducibile ad una forma tipica [. . .].

“Nozione di parallèleismo in una varietà qualunque …”
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **42**, 1917, p.175

[…] Ecco qualche conseguenza geometrica.

1° La direzione parallèlea in un punto generico P ad una direzione (α) uscente da un altro punto qualsiasi P_0 dipende in generale dal cammino secondo cui si passa da P_0 a P. L’indipendenza dal cammino è proprietà esclusiva delle varietà euclidee.

Connections

Variété affinement connectée

- Weyl appelle la variété M **affinement connectée** si chaque espace tangent $T_P M$ ($P \in M$) est connecté à tous les espaces tangents voisins $T_{P'} M$ à travers une application
$$\Xi_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \Xi_X V_P$$
linéaire en l'argument 'principal' $V_P \in T_P M$ et également en l'argument (court) directionnel
$$X = P' - P,$$
où P' (voisin de P) et ainsi X sont vus comme appartenants à $T_P M$

- Ξ_X sera, en tant qu'applicaiton linéaire, representée par une matrice, c'est-à-dire par
$$\Xi^a_c = \langle dx^a, \Xi_X \partial_c \rangle = \sum_b \Xi^a_{bc} X^b = \sum_b \langle dx^a, \Xi_{\partial_b} \partial_c \rangle \langle dx^b, X \rangle$$

Variété affinement connectée

- Weyl appelle la variété M **affinement connectée** si chaque espace tangent $T_P M$ ($P \in M$) est connecté à tous les espaces tangents voisins $T_{P'} M$ à travers une application
$$\Xi_X : T_P M \to T_{P'} M : V_P \mapsto V_{P'} = \Xi_X V_P$$
linéaire en l'argument 'principal' $V_P \in T_P M$ et également en l'argument (court) directionnel
$$X = P' - P,$$
où P' (voisin de P) et ainsi X sont vus comme appartenants à $T_P M$

- Ξ_X sera, en tant qu'applicaiton linéaire, representée par une matrice, c'est-à-dire par
$$\Xi^a_c = \langle dx^a, \Xi_X \partial_c \rangle = \sum_b \Xi^a_{bc} X^b = \sum_b \langle dx^a, \Xi_{\partial_b} \partial_c \rangle \langle dx^b, X \rangle$$

Différences de composantes

- Weyl parle spécifiquement des composantes

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

exigeant qu'elles sont linéaires en les composantes

$$X^b \text{ et } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la fonction bilinéaire

$$\varGamma^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sera une matrice, représentée par $\varGamma^a_{bc}$

- et donc la différence δV^a est

$$-\sum_{bc} \varGamma^a_{bc} X^b V^c$$

Différences de composantes

- Weyl parle spécifiquement des composantes

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

exigeant qu'elles sont linéaires en les composantes

$$X^b \text{ et } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la fonction bilinéaire

$$\Gamma^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sera une matrice, représentée par Γ^a_{bc}

- et donc la différence δV^a est

$$-\sum_{bc} \Gamma^a_{bc} X^b V^c$$

Différences de composantes

- Weyl parle spécifiquement des composantes

$$\delta V^a = \langle dx^a_{P'}, V_{P'} \rangle - \langle dx^a_P, V_P \rangle,$$

exigeant qu'elles sont linéaires en les composantes

$$X^b \text{ et } V^c_P = \langle dx^c_P, V_P \rangle$$

- la fonction bilinéaire

$$\mathit{\Gamma}^a(\{X^b\}, \{V^c\}) = \delta V^a$$

sera une matrice, représentée par $\mathit{\Gamma}^a_{bc}$

- et donc la différence δV^a est

$$-\sum_{bc} \mathit{\Gamma}^a_{bc} X^b V^c$$

Coordonnées géodésiques

- par rapport aux coordonées géodésiques y^a qui annullent

$$\Gamma^a_c = \sum_b \Gamma^a_{bc} X^b = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{c(y)} \rangle \text{ et } \delta V^a,$$

laissant inchangées les composantes V^a, Ξ^a_c devient la matrice identité

$$\delta^a_c = \langle dy^a, \Xi_X \partial_{c(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- physiquement ceci est lié au principe d'équivalence, d'après lequel un champ gravitationnel Γ^a_{bc} peut toujours être éliminé ou généré à P par un choix de coordonnées approprié

Coordonnées géodésiques

- par rapport aux coordonées géodésiques y^a qui annullent

$$\Gamma^a_c = \sum_b \Gamma^a_{bc} X^b = \langle dy^a, \nabla_X \partial_{c(y)} \rangle \text{ et } \delta V^a,$$

laissant inchangées les composantes V^a, Ξ^a_c devient la matrice identité

$$\delta^a_c = \langle dy^a, \Xi_X \partial_{c(y)} \rangle \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- physiquement ceci est lié au principe d'équivalence, d'après lequel un champ gravitationnel Γ^a_{bc} peut toujours être éliminé ou généré à P par un choix de coordonnées approprié

De la direction à la longueur

- avec la justice mathématique à l'esprit Weyl s'adresse ensuite à la longueur, raisonnant de la même manière

- pour clarifier sa démarche on peut prendre une seule composante de la différence

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

en l'appelant δl (ce sera la 'différence scalaire de longueur carrée')

- l'indice supérieur de Γ^a_{bc} disparait, laissant

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

De la direction à la longueur

- avec la justice mathématique à l'esprit Weyl s'adresse ensuite à la longueur, raisonnant de la même manière

- pour clarifier sa démarche on peut prendre une seule composante de la différence

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

en l'appelant δl (ce sera la 'différence scalaire de longueur carrée')

- l'indice supérieur de Γ^a_{bc} disparait, laissant

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

De la direction à la longueur

- avec la justice mathématique à l'esprit Weyl s'adresse ensuite à la longueur, raisonnant de la même manière

- pour clarifier sa démarche on peut prendre une seule composante de la différence

$$\{\delta V^0, \ldots, \delta V^3\},$$

en l'appelant δl (ce sera la 'différence scalaire de longueur carrée')

- l'indice supérieur de Γ^a_{bc} disparait, laissant

$$\delta l = \sum_{bc} \Gamma_{bc} V^b X^c$$

La connection de longueur

- si maintenant on prend une seule composante de l'argument principal $\{V^0, \ldots, V^3\}$, en l'appelant l (ce sera la longueur carrée), le deuxième indice inférieur de $\varGamma_{bc}$ disparait aussi, laissant

$$\delta l = \sum_c \varGamma_c l X^c,$$

où les $\varGamma_c = \langle A, \partial_c \rangle$ sont les composantes d'une 1-forme, que j'appelle A pensant à l'électricité ($c = 0, \ldots, 3$)

Les conditions imposées par Weyl

- mais ceci n'est pas exactement l'argument de Weyl, qui est mieux exprimé comme suit
  - la connection de longueur A générant la différence scalaire δl (de longueur carrée) devra être linéaire en la longueur carrée l et la direction X

- une fonction linéaire $A(l, X) = \delta l$ d'un scalaire l et un vecteur X donnant un scalaire δl sera une 1-forme :

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

où α est la 1-forme 'différence de longueur carrée'

Les conditions imposées par Weyl

- mais ceci n'est pas exactement l'argument de Weyl, qui est mieux exprimé comme suit
  - la connection de longueur A générant la différence scalaire δl (de longueur carrée) devra être linéaire en la longueur carrée l et la direction X

- une fonction linéaire $A(l, X) = \delta l$ d'un scalaire l et un vecteur X donnant un scalaire δl sera une 1-forme :

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

où α est la 1-forme 'différence de longueur carrée'

Les conditions imposées par Weyl

- mais ceci n'est pas exactement l'argument de Weyl, qui est mieux exprimé comme suit
  - la connection de longueur A générant la différence scalaire δl (de longueur carrée) devra être linéaire en la longueur carrée l et la direction X

- une fonction linéaire $A(l, X) = \delta l$ d'un scalaire l et un vecteur X donnant un scalaire δl sera une 1-forme :

$$\delta l = \langle \alpha, X \rangle = -l \langle A, X \rangle,$$

où α est la 1-forme 'différence de longueur carrée'

Notation

- Weyl en réalité écrit

$$dl = -l d\varphi$$

(les d trompeurs ne doivent pas être compris globalement—ou même localement, dans la TEG ; car $F = d^2\varphi = d^2 A$ deviendra la 2-forme de Faraday et d^2 est nul)

- j'écris

$$\alpha = -lA$$

Notation

- Weyl en réalité écrit
$$dl = -l d\varphi$$
(les d trompeurs ne doivent pas être compris globalement—ou même localement, dans la TEG ; car $F = d^2\varphi = d^2 A$ deviendra la 2-forme de Faraday et d^2 est nul)

- j'écris
$$\alpha = -lA$$

1-forme exacte

- une 1-forme **exacte** $A = d\mu$ rendrait intégrable le transport congruent, enlevant de l'‘allongement’

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

toute dépendance du parcours $\gamma : [0,1] \to M$, où $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$ est la différence entre les valeurs $\mu_1 = \mu(P_1)$ et $\mu_0 = \mu(P_0)$ de μ à $P_1 = \gamma(1)$ et $P_0 = \gamma(0)$

- mais c'est précisément à l'integrabilité que Weyl voulait renoncer, pour la parité de direction et longueur

- une 1-forme exacte permettrait, tout en allongeant les vecteurs, quand même les comparaisons éloignées (integrables), laissant irrésolue l'injustice fondamentale

- la justice veut que la rotation $F = dA$ de la 1-forme A ne soit pas partout nulle

1-forme exacte

- une 1-forme **exacte** $A = d\mu$ rendrait intégrable le transport congruent, enlevant de l'‘allongement’
$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$
toute dépendance du parcours $\gamma : [0,1] \to M$, où $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$ est la différence entre les valeurs $\mu_1 = \mu(P_1)$ et $\mu_0 = \mu(P_0)$ de μ à $P_1 = \gamma(1)$ et $P_0 = \gamma(0)$

- mais c'est précisément à l'integrabilité que Weyl voulait renoncer, pour la parité de direction et longueur

- une 1-forme exacte permettrait, tout en allongeant les vecteurs, quand même les comparaisons éloignées (integrables), laissant irrésolue l'injustice fondamentale

- la justice veut que la rotation $F = dA$ de la 1-forme A ne soit pas partout nulle

1-forme exacte

- une 1-forme **exacte** $A = d\mu$ rendrait intégrable le transport congruent, enlevant de l'‘allongement’
$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$
toute dépendance du parcours $\gamma : [0,1] \to M$, où $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$ est la différence entre les valeurs $\mu_1 = \mu(P_1)$ et $\mu_0 = \mu(P_0)$ de μ à $P_1 = \gamma(1)$ et $P_0 = \gamma(0)$

- mais c'est précisément à l'integrabilité que Weyl voulait renoncer, pour la parité de direction et longueur

- une 1-forme exacte permettrait, tout en allongeant les vecteurs, quand même les comparaisons éloignées (integrables), laissant irrésolue l'injustice fondamentale

- la justice veut que la rotation $F = dA$ de la 1-forme A ne soit pas partout nulle

1-forme exacte

- une 1-forme **exacte** $A = d\mu$ rendrait intégrable le transport congruent, enlevant de l'‘allongement’

$$e^{\int_\gamma A} = e^{\int d\mu} = e^{\Delta\mu}$$

  toute dépendance du parcours $\gamma : [0,1] \to M$, où $\Delta\mu = \mu_1 - \mu_0$ est la différence entre les valeurs $\mu_1 = \mu(P_1)$ et $\mu_0 = \mu(P_0)$ de μ à $P_1 = \gamma(1)$ et $P_0 = \gamma(0)$

- mais c'est précisément à l'integrabilité que Weyl voulait renoncer, pour la parité de direction et longueur

- une 1-forme exacte permettrait, tout en allongeant les vecteurs, quand même les comparaisons éloignées (integrables), laissant irrésolue l'injustice fondamentale

- la justice veut que la rotation $F = dA$ de la 1-forme A ne soit pas partout nulle

Jauge géodésique

- Weyl exige que la 1-forme ‘différence de longueur carrée’

$$\alpha = -lA$$

  soit localement éliminable par recalibration, ce qui confirme que A doit être une 1-forme, peut-être inéxacte

- comme l n’est pas généralement nulle, la requète de Weyl veut dire que $A + d\lambda$ soit annullable à un point, où la jauge λ est **géodésique**

- comme $d\lambda$ est une 1-forme, A le sera également

- bien que $d\lambda$ soit exacte, Weyl demande uniquement qu’elle annulle A **en un point**, et ainsi A ne doit pas être exact (ou même fermé)

Jauge géodésique

- Weyl exige que la 1-forme 'différence de longueur carrée'

$$\alpha = -lA$$

  soit localement éliminable par recalibration, ce qui confirme que A doit être une 1-forme, peut-être inéxacte

- comme l n'est pas généralement nulle, la requète de Weyl veut dire que $A + d\lambda$ soit annullable à un point, où la jauge λ est **géodésique**

- comme $d\lambda$ est une 1-forme, A le sera également

- bien que $d\lambda$ soit exacte, Weyl demande uniquement qu'elle annulle A **en un point**, et ainsi A ne doit pas être exact (ou même fermé)

Jauge géodésique

- Weyl exige que la 1-forme ‘différence de longueur carrée’

$$\alpha = -lA$$

  soit localement éliminable par recalibration, ce qui confirme que A doit être une 1-forme, peut-être inéxacte

- comme l n’est pas généralement nulle, la requète de Weyl veut dire que $A + d\lambda$ soit annullable à un point, où la jauge λ est **géodésique**

- comme $d\lambda$ est une 1-forme, A le sera également

- bien que $d\lambda$ soit exacte, Weyl demande uniquement qu’elle annulle A **en un point**, et ainsi A ne doit pas être exact (ou même fermé)

Jauge géodésique

- Weyl exige que la 1-forme ‘différence de longueur carrée’

$$\alpha = -lA$$

  soit localement éliminable par recalibration, ce qui confirme que A doit être une 1-forme, peut-être inéxacte

- comme l n’est pas généralement nulle, la requète de Weyl veut dire que $A + d\lambda$ soit annullable à un point, où la jauge λ est **géodésique**

- comme $d\lambda$ est une 1-forme, A le sera également

- bien que $d\lambda$ soit exacte, Weyl demande uniquement qu’elle annulle A **en un point**, et ainsi A ne doit pas être exact (ou même fermé)

Raum Zeit Materie
Berlin, Springer, 1923, p.122

Ein Punkt P hängt also mit seiner Umgebung metrisch zusammen, wenn von jeder Strecke in P feststeht, welche Strecke aus ihr durch kongruente Verpflanzung von P nach dem beliebigen zu P unendlich benachbarten Punkte P' hervorgeht. Die einzige Forderung, welche wir an diesen Begriff stellen (zugleich die weitgehendste, die überhaupt möglich ist), ist diese : Die Umgebung von P läßt sich so eichen, daß die Maßzahl einer jeden Strecke in P durch kongruente Verpflanzung nach den unendlich benachbarten Punkten keine Änderung erleidet.

Mais A n'est pas un tenseur !

- on peut se demander comment le tenseur A peut correspondre à la connection Γ^a_{bc}, qui n'en est pas un

- c'est uniquement par rapport aux transformations de coordonnées que les composantes $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ se transforment comme un tenseur

$$A_a \mapsto \bar{A}_b = A_a \langle d\bar{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- par rapport aux recalibrations

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

  les composantes A_a ne se transforment pas comme un tenseur, et peuvent s'annuller, par exemple

Mais A n'est pas un tenseur !

- on peut se demander comment le tenseur A peut correspondre à la connection Γ^a_{bc}, qui n'en est pas un

- c'est uniquement par rapport aux transformations de coordonnées que les composantes $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ se transforment comme un tenseur

$$A_a \mapsto \bar{A}_b = A_a \langle d\bar{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- par rapport aux recalibrations

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

les composantes A_a ne se transforment pas comme un tenseur, et peuvent s'annuller, par exemple

Mais A n'est pas un tenseur !

- on peut se demander comment le tenseur A peut correspondre à la connection Γ^a_{bc}, qui n'en est pas un

- c'est uniquement par rapport aux transformations de coordonnées que les composantes $A_a = \langle A, \partial_a \rangle = \Gamma_a$ se transforment comme un tenseur

$$A_a \mapsto \bar{A}_b = A_a \langle d\bar{x}^b, \partial_{a(x)} \rangle$$

- par rapport aux recalibrations

$$A_a \mapsto A'_a = A_a + \partial_a \lambda$$

les composantes A_a ne se transforment pas comme un tenseur, et peuvent s'annuller, par exemple

Électricité

Les équations de Maxwell

- avec $F = dA$ et sa conséquence $dF = 0$ devant les yeux, Weyl ne pouvait pas ne pas voir le quadripotentiel A, la 2-forme $F = dA$, et les deux équations homogènes de Maxwell exprimées par $dF = 0$, c'est-à-dire

$$\nabla \cdot B = 0 \quad \text{et} \quad \nabla \times E + \partial B / \partial t = 0$$

(pour ne pas parler d'un 'principe d'équivalence' électromagnétique, d'après lequel le scalaire δl 'différence de longueur carrée' et la 1-forme α, tout comme le quadripotentiel A, peuvent être générés ou éliminés à un point par une jauge appropriée λ)

En coordonnées

- en coordonnées on écrirait :

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

  où $A_a = A(\partial_a)$; les E_x, E_y, E_z sont les composants du champ électrique et B_x, B_y, B_z celles du champ magnétique

- ou

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

En coordonnées

- en coordonnées on écrirait :

$$F_{ab} = F(\partial_a, \partial_b) = \partial_a A_b - \partial_b A_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & B_z & -B_y \\ E_y & -B_z & 0 & B_x \\ E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix},$$

  où $A_a = A(\partial_a)$; les E_x, E_y, E_z sont les composants du champ électrique et B_x, B_y, B_z celles du champ magnétique

- ou

$$F = \frac{1}{2} \sum_{ab} F_{ab}\, dx^a \wedge dx^b$$

Électromagnétisme loin des sources

- les deux équations homogènes de Maxwell sont données par la 3-forme nulle

$$dF = \frac{1}{2}\sum_{bc} dF_{bc} \wedge dx^b \wedge dx^c = \frac{1}{6}\sum_{abc} \partial_a F_{bc}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$$

avec composantes $dF(\partial_a, \partial_b, \partial_c) = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

- les autres deux équations de Maxwell sont obtenues en guise ‘homogène’ en posant $d^*F = 0$, où $^*F$ est duale (‘Hodge’) à la 2-forme de Faraday

- en coordonnées

$$(^*F)_{ab} = (^*F)(\partial_a, \partial_b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Électromagnétisme loin des sources

- les deux équations homogènes de Maxwell sont données par la 3-forme nulle

$$dF = \frac{1}{2}\sum_{bc} dF_{bc} \wedge dx^b \wedge dx^c = \frac{1}{6}\sum_{abc} \partial_a F_{bc}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$$

avec composantes $dF(\partial_a, \partial_b, \partial_c) = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

- les autres deux équations de Maxwell sont obtenues en guise 'homogène' en posant $d{}^*F = 0$, où ${}^*F$ est duale ('Hodge') à la 2-forme de Faraday

- en coordonnées

$$({}^*F)_{ab} = ({}^*F)(\partial_a, \partial_b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

Électromagnétisme loin des sources

- les deux équations homogènes de Maxwell sont données par la 3-forme nulle

$$dF = \frac{1}{2} \sum_{bc} dF_{bc} \wedge dx^b \wedge dx^c = \frac{1}{6} \sum_{abc} \partial_a F_{bc}\, dx^a \wedge dx^b \wedge dx^c = 0$$

  avec composantes $dF(\partial_a, \partial_b, \partial_c) = \partial_a F_{bc} + \partial_b F_{ca} + \partial_c F_{ab}$

- les autres deux équations de Maxwell sont obtenues en guise 'homogène' en posant $d^*F = 0$, où $^*F$ est duale ('Hodge') à la 2-forme de Faraday

- en coordonnées

$$({}^*F)_{ab} = ({}^*F)(\partial_a, \partial_b) \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z & -E_y \\ -B_y & -E_z & 0 & E_x \\ -B_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

“Reine Infinitesimalgeometrie”

Mathematische Zeitschrift **2**, 1918, p.385

Nach dieser Theorie ist **alles Wirkliche, das in der Welt vorhanden ist, Manifestation der Weltmetrik** ; die physikalischen Begriffe sind keine andern als die geometrischen. [. . .][1]

⋮

1. Ich bin verwegen genug, zu glauben, daß die Gesamtheit der physikalischen Erscheinungen sich aus einem einzigen universellen Weltgesetz von höchster mathematischer Einfachheit herleiten läßt.

Compensation

Liberté de jauge

- étant donné que seule la rotation $F = dA$ ‘compte,’ on est libre d’ajouter à A le différentiel $d\mu$ d’une fonction μ

- en transformant le quadripotentiel selon

$$A \to A' = A + d\mu,$$

la quadrirotation

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

reste inchangée

Liberté de jauge

- étant donné que seule la rotation $F = dA$ ‘compte,’ on est libre d’ajouter à A le différentiel $d\mu$ d’une fonction μ

- en transformant le quadripotentiel selon

$$A \to A' = A + d\mu,$$

la quadrirotation

$$F = dA' = d(A + d\mu) = dA + d^2\mu = dA$$

reste inchangée

Allongement ultérieur

- même si la quadrirotation demeure inchangée par le différentiel $d\mu$, la longueur change

- transportant X_0 du point P_0 avec valeur $\mu_0 = \mu(P_0)$ au point P_1 avec valeur $\mu_1 = \mu(P_1)$, la longueur carrée finale $g_1(X_1, X_1)$ acquiert le facteur intégrable $e^{\Delta\mu}$

- car la fonction μ allonge selon

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A},$$

et donc

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Allongement ultérieur

- même si la quadrirotation demeure inchangée par le différentiel $d\mu$, la longueur change

- transportant X_0 du point P_0 avec valeur $\mu_0 = \mu(P_0)$ au point P_1 avec valeur $\mu_1 = \mu(P_1)$, la longueur carrée finale $g_1(X_1, X_1)$ acquiert le facteur intégrable $e^{\Delta\mu}$

- car la fonction μ allonge selon

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A},$$

et donc

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Allongement ultérieur

- même si la quadrirotation demeure inchangée par le différentiel $d\mu$, la longueur change

- transportant X_0 du point P_0 avec valeur $\mu_0 = \mu(P_0)$ au point P_1 avec valeur $\mu_1 = \mu(P_1)$, la longueur carrée finale $g_1(X_1, X_1)$ acquiert le facteur intégrable $e^{\Delta\mu}$

- car la fonction μ allonge selon

$$e^{\int_\sigma A} \mapsto e^{\int_\sigma A'} = e^{\int_\sigma (A+d\mu)} = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} = e^{\int_\sigma A} e^{\mu_1} e^{-\mu_0} \neq e^{\int_\sigma A},$$

  et donc

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0) \neq e^{\int_\sigma A'} g_0(X_0, X_0)$$

Transformation conforme

- pour rétablir l'invariance de la longueur nous devons compenser en multipliant la métrique par le facteur conforme e^{μ} :

$$g \rightarrow g' = e^{\mu} g$$

- ensemble les deux transformations laissent inchangée la longueur :

$$g'_1(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g'_0(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- les exposants se détruisent, donnant

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Transformation conforme

- pour rétablir l'invariance de la longueur nous devons compenser en multipliant la métrique par le facteur conforme e^{μ} :

$$g \longrightarrow g' = e^{\mu} g$$

- ensemble les deux transformations laissent inchangée la longueur :

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- les exposants se détruisent, donnant

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Transformation conforme

- pour rétablir l'invariance de la longueur nous devons compenser en multipliant la métrique par le facteur conforme e^{μ} :

$$g \to g' = e^{\mu} g$$

- ensemble les deux transformations laissent inchangée la longueur :

$$g_1'(X_1, X_1) = e^{\mu_1} g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A'} g_0'(X_0, X_0) = e^{\int_\sigma A} e^{\Delta\mu} e^{\mu_0} g_0(X_0, X_0)$$

- les exposants se détruisent, donnant

$$g_1(X_1, X_1) = e^{\int_\sigma A} g_0(X_0, X_0)$$

Connection métrique

- le rapport entre les ces deux transformations est aussi exprimé par la **compatibilité de Weyl**

- la métrique g est (strictement) **compatible** avec la connection ∇ si

$$\nabla g = 0$$

- en ce cas les géodésiques les plus droites (satisfaisant $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) seront aussi 'stationnaires,' satisfaisant également

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Connection métrique

- le rapport entre les ces deux transformations est aussi exprimé par la **compatibilité de Weyl**

- la métrique g est (strictement) **compatible** avec la connection ∇ si

$$\nabla g = 0$$

- en ce cas les géodésiques les plus droites (satisfaisant $\nabla_{\dot\sigma}\dot\sigma = 0$) seront aussi 'stationnaires,' satisfaisant également

$$\delta \int \sqrt{g(\dot\sigma, \dot\sigma)}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Connection métrique

- le rapport entre les ces deux transformations est aussi exprimé par la **compatibilité de Weyl**

- la métrique g est (strictement) **compatible** avec la connection ∇ si

$$\nabla g = 0$$

- en ce cas les géodésiques les plus droites (satisfaisant $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$) seront aussi 'stationnaires,' satisfaisant également

$$\delta \int \sqrt{g(\dot{\sigma}, \dot{\sigma})}\, ds = \delta \int ds = 0$$

Compatibilité de Weyl

- la métrique recalibrée $e^{\mu}g$ ne satisfera que la compatibilité plus faible 'de Weyl,' exprimée par

$$\nabla(e^{\mu}g) = d\mu \otimes (e^{\mu}g),$$

où l'on voit juxtaposées les deux transformations qui se compensent

- comme le différentiel $d\lambda = 0$ d'une constante λ s'annulle, tout multiple constant $e^{\lambda}g$ de g sera compatible avec ∇ :

$$\nabla(e^{\lambda}g) = d\lambda \otimes (e^{\lambda}g) = 0 \otimes (e^{\lambda}g) = 0$$

Compatibilité de Weyl

- la métrique recalibrée $e^{\mu}g$ ne satisfera que la compatibilité plus faible 'de Weyl,' exprimée par
$$\nabla(e^{\mu}g) = d\mu \otimes (e^{\mu}g),$$
où l'on voit juxtaposées les deux transformations qui se compensent

- comme le différentiel $d\lambda = 0$ d'une constante λ s'annulle, tout multiple constant $e^{\lambda}g$ de g sera compatible avec ∇ :
$$\nabla(e^{\lambda}g) = d\lambda \otimes (e^{\lambda}g) = 0 \otimes (e^{\lambda}g) = 0$$

Einstein

L'objection d'Einstein

- c'est donc la justice mathématique qui poussa Weyl à rendre le transport congruent aussi dépendant du parcours que le transport parallèle

- mais l'expérience, objecta Einstein, est injuste, montrant l'integrabilité du transport congruent : des montres qui ont la même cadence à un endroit donné **la maintiendront ailleurs**, quel que soit le parcours suivi (et quelles que soient les exigences de la justice mathématique !)

L’objection d’Einstein

- c’est donc la justice mathématique qui poussa Weyl à rendre le transport congruent aussi dépendant du parcours que le transport parallèle

- mais l’expérience, objecta Einstein, est injuste, montrant l’integrabilité du transport congruent : des montres qui ont la même cadence à un endroit donné **la maintiendront ailleurs**, quel que soit le parcours suivi (et quelles que soient les exigences de la justice mathématique !)

Einstein à Weyl, 15 Avril 1918

So schön Ihre Gedanke ist, muss ich doch offen sagen, dass es nach meiner Ansicht ausgeschlossen ist, dass die Theorie die Natur entspricht. Das ds selbst hat nämlich reale Bedeutung. Denken Sie sich zwei Uhren, die relativ zueinander ruhend neben einander gleich rasch gehen. Werden sie voneinander getrennt, in beliebiger Weise bewegt und dann wieder zusammen gebracht, so werden sie wieder gleich (rasch) gehen, d. h. ihr relativer Gang hängt nicht von der Vorgeschichte ab. Denke ich mir zwei Punkte P_1 & P_2 die durch eine Zeitartige Linie verbunden werden können. Die an P_1 & P_2 anliegenden zeitartigen Elemente ds_1 und ds_2 können dann durch mehrere zeitartigen Linien verbunden werden, auf denen sie liegen. Auf diesen laufende Uhren werden ein Verhältnis $ds_1 : ds_2$ liefern, welches von der Wahl der verbindenden Kurven unabhängig ist.—Lässt man den Zusammenhang des ds mit Massstab- und Uhr-Messungen fallen, so verliert die Rel. Theorie überhaupt ihre empirische Basis.

Lignes spectrales nettes

- quatre jours après Einstein reformula l'objection en utilisant les 'fréquences propres' d'atomes (plutôt que d'horloges macroscopiques) "du même genre"

- si ces fréquences dépendaient des vicissitudes (électriques) des atomes—c'est à dire des parcours suivis—les éléments chimiques que les atomes constitueraient si on les unissait n'auraient pas les lignes spectrales nettes que l'on voit

Lignes spectrales nettes

- quatre jours après Einstein reformula l'objection en utilisant les 'fréquences propres' d'atomes (plutôt que d'horloges macroscopiques) "du même genre"

- si ces fréquences dépendaient des vicissitudes (électriques) des atomes—c'est à dire des parcours suivis—les éléments chimiques que les atomes constitueraient si on les unissait n'auraient pas les lignes spectrales nettes que l'on voit

Einstein à Weyl, 19 Avril 1918

[. . .] wenn die Länge eines Einheitsmassstabes (bezw. die Gang-Geschwindigkeit einer Einheitsuhr) von der Vorgeschichte abhingen. Wäre dies in der Natur wirklich so, dann könnte es nicht chemische Elemente mit Spektrallinien von bestimmter Frequenz geben, sondern es müsste die relative Frequenz zweier (räumlich benachbarter) Atome der gleichen Art im Allgemeinen verschieden sein. Da dies nicht der Fall ist, scheint mir die Grundhypothese der Theorie leider nicht annehmbar, deren Tiefe und Kühnheit aber jeden Leser mit Bewunderung erfüllen muss.

Cul-de-sac ?

- mais bien que l'expérience indique l'intégrabilité du transport congruent, soutenir que la parité de direction et longueur n'ait porté nulle part serait excessif

- la structure qui sortit de cette ‘justice mathématique,’ apparemment si gratuite, devait survivre dans nos meilleures théories de jauge

Cul-de-sac ?

- mais bien que l'expérience indique l'intégrabilité du transport congruent, soutenir que la parité de direction et longueur n'ait porté nulle part serait excessif

- la structure qui sortit de cette 'justice mathématique,' apparemment si gratuite, devait survivre dans nos meilleures théories de jauge