Alexander Afriat
Università di Urbino
a.afriat-alumni@lse.ac.uk

CALZINI DI BERTLMANN E SVILUPPI MULTIORTOGONALI

ABSTRACT: It is argued that perfect quantum correlations are not due to additive conservation.

> Dr. Bertlmann likes to wear two socks of different colours. Which colour he will have on a given foot on a given day is quite unpredictable. But when you see that the first sock is pink you can already be sure that the second sock will not be pink. Observation of the first, and experience of Bertlmann, gives immediate information about the second.
>
> Bell (1981)

Quasi tutte le peculiarità interessanti della meccanica quantistica hanno a che vedere con l'interferenza, la quale però non sarà minimamente presente nel caso trattato. L'interferenza si manifesta soltanto quando sono in gioco basi diverse, mentre qui compare solo un'unica base (fattorizzabile).

Viene spesso affermato, e ancora più spesso sospettato, che *dietro alle correlazioni quantistiche*—intendendo quelle perfette—*c'è la conservazione*. L'intuizione soggiacente a questo punto di vista è ben espressa dai calzini di Bertlmann, oppure dal fatto che la distribuzione di vino su due bicchieri può essere dedotta, purché si conosca il totale, da una misura fatta su uno dei due.

Credo che in tali affermazioni s'intenda la conservazione *additiva*, la quale può però essere divisa in due parti logicamente indipendenti: 1. *la conservazione*; e 2. *una condizione* '*additiva*,' che nel seguito verrà definita e chiamata (l). Le correlazioni quantistiche hanno poco o niente a che vedere col tempo, che invece ha tutto a che vedere con la conservazione; è pertanto intorno all'additività che ruota la questione.

Sosterrò che con due sottosistemi può essere costruita una condizione additiva in grado di spiegare le correlazioni quantistiche, *ma solo in quel caso*; con più sottosistemi *le correlazioni quantistiche sono troppo forti per essere spiegabili in quei termini*. Una spiegazione per essere tale dovrebbe essere generale; se riguarda solo un ristretto caso particolare non spiega nulla; e quindi le correlazioni quantistiche non hanno niente a che vedere con l'additività—e quindi nemmeno con la conservazione additiva.

È meglio, in altri termini, prendere tre calzini (nonché altrettanti piedi) che non due: una volta che il calzino rosa viene trovato su un piede, sappiamo che i calzini rimanenti si troveranno sugli altri piedi, ma non sappiamo dove sarà quello blu. Con tre bicchieri, una misura compiuta su un bicchiere ci dice solo quanto vino contengono gli altri due insieme, ma non quanto ne contiene il terzo. Gli sviluppi multiortogonali sembrano andare oltre le conoscenze disponibili in questi casi, e dirci dove si trova il calzino blu, o quanto vino contiene il terzo bicchiere.

Consideriamo lo sviluppo multiortogonale

$$|\Psi\rangle = \sum_m c_m \bigotimes_{r=1}^{N} |a_m^r\rangle \in \mathcal{H} = \bigotimes_{r=1}^{N} \mathcal{H}^r, \qquad (1)$$

dove gli spazi di Hilbert[1] $\mathcal{H}^r = \mathrm{span}\{|a_1^r\rangle, |a_2^r\rangle, \ldots\}$ hanno la stessa dimensionalità, e $\langle a_i^r | a_j^r\rangle = \delta_{ij}$ $(r = 1,\ldots,N)$. Lo stato $|\Psi\rangle$ determina una corrispondenza $|a_m^1\rangle \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow |a_m^N\rangle$ *multi*univoca o *uno a … a uno* (N volte) tra le basi $\{|a_m^1\rangle\},\ldots,\{|a_m^N\rangle\}$, $m = 1,2,\ldots$. Per rendere osservabile la corrispondenza e dar luogo a correlazioni, possiamo costruire l'operatore hermitiano

$$\mathbf{A} = \sum_{r=1}^{N} \mathbf{A}^r : \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

dove gli operatori

$$\mathbf{A}^1 = A^1 \otimes \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I}^{N-1 \text{ volte}} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \ldots, \mathbf{A}^N = \overbrace{I \otimes \ldots \otimes I}^{N-1 \text{ volte}} \otimes A^N : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

e gli operatori (massimali)

$$A^1 = \sum_m \lambda_m^1 |a_m^1\rangle\langle a_m^1| : \mathcal{H}^1 \to \mathcal{H}^1, \ldots, A^N = \sum_m \lambda_m^N |a_m^N\rangle\langle a_m^N| : \mathcal{H}^N \to \mathcal{H}^N.$$

Siffatti operatori stabiliscono una corrispondenza biunivoca $\lambda_1^r \leftrightarrow |a_1^r\rangle$, $\lambda_2^r \leftrightarrow |a_2^r\rangle, \ldots$ tra autovalori e autovettori, così estendendo agli N spettri $\Lambda^r = \{\lambda_1^r, \lambda_2^r, \ldots\}$ la suddetta corrispondenza multiunivoca fra le basi. La scoperta di un autovalore pertanto ne individua uno in ognuno degli altri spazi fattore. La cosa sarà particolarmente sorprendente se richiediamo che

$$\sum_{r=1}^{N} \lambda_m^r = \lambda$$

(□)

per ogni m (sicché $\mathbf{A}|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle$); perché allora il sistema intero possiede un ammontare λ della grandezza fisica A rappresentata da $\mathbf{A}$, la cui esatta distribuzione tra i

[1] Per 'span' s'intende uno spazio *chiuso*.

sottosistemi verrebbe determinata da una misura fatta su uno qualsiasi di loro. Ce l'aspetteremmo con due sottosistemi, ma forse non con diversi. Le aspettative però sono notoriamente soggettive …

Consideriamo il prodotto cartesiano

$$\Lambda = \mathop{\times}_{r=1}^{N} \Lambda^r = \{(\lambda^1_{m^1}, \ldots, \lambda^N_{m^N})\}$$

degli spettri, e il sottoinsieme

$$\Lambda(\lambda) = \{(\lambda^1_{m^1}, \ldots, \lambda^N_{m^N}) : \sum_{r=1}^{N} \lambda^r_{m^r} = \lambda\} \subset \Lambda$$

soddisfacente la condizione (λ). La scoperta di un autovalore λ^s_n (il valore $s = 1$ *oppure* … *oppure* N dell'indice superiore viene scelto dallo sperimentatore, quello dell'indice inferiore dalla natura) determinerà un sottoinsieme

$$\Lambda(\lambda; m^s = n) = \{(\lambda^1_{m^1}, \ldots, \lambda^N_{m^N}) : \sum_{r=1}^{N} \lambda^r_{m^r} = \lambda; m^s = n\} \subset \Lambda_{(\lambda)},$$

che conterrà un solo elemento quando $N = 2$.

Ci sarà anche un sottoinsieme di $\Lambda(\lambda)$ relativo allo sviluppo multiortogonale (1), ossia $\Lambda(1) = \{(\lambda^1_m, \ldots, \lambda^N_m)\} \subset \Lambda(\lambda)$. Qui la scoperta dello stesso autovalore λ^s_n individuerebbe la N-upla

$$\Lambda(1; m^s = n) = (\lambda^1_n, \ldots, \lambda^N_n) \subset \Lambda(\lambda; m^s = n).$$

Le uguaglianze $\Lambda(1) = \Lambda(\lambda)$ e $\Lambda(1; m^s = n) = \Lambda(\lambda; m^s = n)$ sono una peculiarità dei noti casi con due sottosistemi; con vari, $\Lambda(1) \subset \Lambda(\lambda)$ e $\Lambda(1; m^s = n) \subset \Lambda(\lambda; m^s = n)$. Le correlazioni prodotte dallo sviluppo multiortogonale sono pertanto più forti di quelle dettate da (λ), e quindi *non possono essere attribuite a tale condizione*.

La questione può anche essere vista come segue. Un vettore $|\Phi\rangle$ appartenente a sottospazi relativi ad autovalori $\lambda^r_{m^r}$ con somma λ sarà autovettore di $\mathbf{A}$ corrispondente a λ; cioè le condizioni

$$\left[\bigotimes_{r=1}^{N} |a^r_{m^r}\rangle\langle a^r_{m^r}|\right] |\Phi\rangle = |\Phi\rangle \text{ e } \sum_{r=1}^{N} \lambda^r_{m^r} = \lambda$$

insieme implicano che $\mathbf{A}|\Phi\rangle = \lambda|\Phi\rangle$. Quindi

$$\Omega(\lambda) = \operatorname{span}\left\{\bigotimes_{r=1}^{N} |a^r_{m^r}\rangle : \sum_{r=1}^{N} \lambda^r_{m^r} = \lambda\right\}$$

sarà l'autospazio relativo a λ.

Laddove $N = 2$, l'insieme $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^s\}$ ($s = 1$ *oppure* 2) che rappresenta le quantità di A rispettivamente possedute dal sistema intero e da uno dei sottosistemi, sarà un insieme commutativo *completo*, dato che *uno* dei prodotti $|a^1_m\rangle|a^2_m\rangle$ verrebbe individuato dalla misurazione delle relative osservabili. La condizione additiva rappresentata da $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^s\}$ pertanto non richiede né più né meno correlazione di quanta derivi dallo sviluppo multiortogonale (1).

Laddove $N > 2$, invece, l'insieme $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^s\}$ ($s = 1$ *oppure* … *oppure* N) non è più completo, essendo multidimensionale il sottospazio

$$\Omega(\lambda\,;\mu^s = \nu) = \mathrm{span}\{|a^1_{\mu^1}\rangle \ldots |a^N_{\mu^N}\rangle : \sum_{r=1}^{N} \lambda^r_{\mu^r} = \lambda\,;\mu^s = \nu\}$$

individuato dalla scoperta di λ^s_ν. Con uno sviluppo multiortogonale, le due misurazioni $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}^s$ individuano un solo prodotto

$$|a_\mu\rangle = \bigotimes_{r=1}^{N} |a^r_\mu\rangle.$$

Le correlazioni derivanti da (1) quindi vanno oltre l'additività rappresentata dall'insieme $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}^s\}$, la quale avrebbe altrimenti individuato il sottospazio più grande $\Omega(\lambda\,;\mu^s = \nu)$.

La questione ha per ora riguardato un solo istante; ci può anche interessare l'evoluzione. Lo sviluppo multiortogonale viene preservato se i vettori $|a_\mu\rangle$ rappresentano autostati dell'energia, perché allora l'operatore di evoluzione temporale lascia invariate le loro direzioni. Si può in tal caso parlare di *conservazione*, e dire che le correlazioni in questione *non sono attribuibili ad una legge di conservazione additiva*.

Bibliografia

J.S. Bell (1981) "Bertlmann's socks and the nature of reality," in J.S. Bell, *Speakable and unspeakable in quantum mechanics*, Cambridge University Press, 1987, pp.139-58