LE RADICI DELL'IMBROGLIO
Come siamo arrivati agli stati imbrogliati

Alessandro Afriat
Istituto di Filosofia
Università di Urbino
afriat@gmail.com

Decima scuola di filosofia della fisica
Meccanica quantistica: logica, fondamenti, computazione
Cesena, 19 settembre 2007

Stati imbrogliati

- al centro dell'informatica e della computazione quantistica, del dibattito sui fondamenti, sono gli stati imbrogliati come

(1) $$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\alpha^1\beta^2\rangle - |\beta^1\alpha^2\rangle) \in \bar{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}^1 \otimes \mathfrak{H}^2,$$

dove la giustapposizione nel ket indica la moltiplicazione tensoriale

$$|\alpha^1\beta^2\rangle = |\alpha^1\rangle|\beta^2\rangle = |\alpha^1\rangle \otimes |\beta^2\rangle,$$

ed $|\alpha^n\rangle$ e $|\beta^n\rangle$ formano una base (ortonormale) nello spazio di Hilbert bidimensionale complesso

$$\mathfrak{H}^n = \mathrm{span}\{|\alpha^n\rangle, |\beta^n\rangle\},$$

$n = 1, 2$

Stati fattorizzabili

- ‘imbrogliati’ perché non prodotti della forma

$$
\begin{aligned}
|\xi\rangle &= |\sigma^1\rangle|\sigma^2\rangle = (a^1|\alpha^1\rangle + b^1|\beta^1\rangle) \otimes (a^2|\alpha^2\rangle + b^2|\beta^2\rangle) \\
&= a^1a^2|\alpha^1\alpha^2\rangle + a^1b^2|\alpha^1\beta^2\rangle + b^1a^2|\beta^1\alpha^2\rangle + b^1b^2|\beta^1\beta^2\rangle,
\end{aligned} \tag{2}
$$

dove $a^n = \langle\alpha^n|\sigma^n\rangle$, $b^n = \langle\beta^n|\sigma^n\rangle$, e naturalmente

$$|\alpha^n\rangle, |\beta^n\rangle, |\sigma^n\rangle \in \mathfrak{H}^n,$$

$n = 1, 2$

Reductio ad absurdum

- se lo stato (1) fosse un prodotto della forma (2) avremmo

$$a^1 b^2 = -b^1 a^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ nonché } a^1 a^2 = b^1 b^2 = 0,$$

con la conseguenza 'assurda'

$$a^1 a^2 b^1 b^2 \neq 0 = a^1 a^2 b^1 b^2$$

Coerenza

- ma il punto essenziale è che $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione *coerente* (ossia *ondulatoria*) degli stati $|\alpha^1\beta^2\rangle$ e $|\beta^1\alpha^2\rangle$

- sovrapposizione che—sicuramente in linea di principio, forse anche sperimentalmente—differisce statisticamente dalla miscela

$$\rho = |1/\sqrt{2}|^2(|\alpha^1\beta^2\rangle\langle\alpha^1\beta^2| + |\beta^1\alpha^2\rangle\langle\beta^1\alpha^2|)$$

(*incoerente*, non ondulatoria) per via della differenza $-\pi = 0 - \pi$ tra le fasi

$$0 = \arg(1/\sqrt{2}) = \arg(|1/\sqrt{2}|e^{i0})$$

e

$$\pi = \arg(-1/\sqrt{2}) = \arg(|-1/\sqrt{2}|e^{i\pi})$$

dei coefficienti complessi $1/\sqrt{2}$ e $-1/\sqrt{2}$

Coerenza

- ma il punto essenziale è che $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione *coerente* (ossia *ondulatoria*) degli stati $|\alpha^1\beta^2\rangle$ e $|\beta^1\alpha^2\rangle$

- sovrapposizione che—sicuramente in linea di principio, forse anche sperimentalmente—differisce statisticamente dalla miscela

$$\rho = |1/\sqrt{2}|^2(|\alpha^1\beta^2\rangle\langle\alpha^1\beta^2| + |\beta^1\alpha^2\rangle\langle\beta^1\alpha^2|)$$

(*incoerente*, non ondulatoria) per via della differenza $-\pi = 0 - \pi$ tra le fasi

$$0 = \arg(1/\sqrt{2}) = \arg(|1/\sqrt{2}|e^{i0})$$

e

$$\pi = \arg(-1/\sqrt{2}) = \arg(|-1/\sqrt{2}|e^{i\pi})$$

dei coefficienti complessi $1/\sqrt{2}$ e $-1/\sqrt{2}$

Onde nello spazio delle configurazioni

- se come spazio di Hilbert prendiamo lo spazio $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{C})$ di funzioni integrabili al quadrato che assegnano numeri complessi ai punti dello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}$, abbiamo delle ‘onde’ $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ che—come tante altre—vivono e si propagano in $\mathbb{E}$

- ma una volta che, avendo due oggetti quantistici da descrivere, prendiamo il prodotto tensore

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{H}} &= \mathcal{L}_2(\bar{\mathbb{E}}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2, \mathbb{C}) \\ &= \mathfrak{H}^1 \otimes \mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C})\end{aligned}$$

  degli spazi $\mathfrak{H}^1 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C})$, le onde, ormai imbrogliate in generale, si propagheranno nello spazio $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2$ a sei dimensioni ($\mathbb{E}^1$ e $\mathbb{E}^2$ rimangono tridimensionali)

- e come ci sono finite?

Onde nello spazio delle configurazioni

- se come spazio di Hilbert prendiamo lo spazio $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{C})$ di funzioni integrabili al quadrato che assegnano numeri complessi ai punti dello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}$, abbiamo delle 'onde' $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ che—come tante altre—vivono e si propagano in $\mathbb{E}$

- ma una volta che, avendo due oggetti quantistici da descrivere, prendiamo il prodotto tensore

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{H}} &= \mathcal{L}_2(\bar{\mathbb{E}}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2, \mathbb{C}) \\ &= \mathfrak{H}^1 \otimes \mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

  degli spazi $\mathfrak{H}^1 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C})$, le onde, ormai imbrogliate in generale, si propagheranno nello spazio $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2$ a sei dimensioni ($\mathbb{E}^1$ e $\mathbb{E}^2$ rimangono tridimensionali)

- e come ci sono finite?

Onde nello spazio delle configurazioni

- se come spazio di Hilbert prendiamo lo spazio $\mathfrak{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}, \mathbb{C})$ di funzioni integrabili al quadrato che assegnano numeri complessi ai punti dello spazio euclideo tridimensionale $\mathbb{E}$, abbiamo delle 'onde' $\phi : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ che—come tante altre—vivono e si propagano in $\mathbb{E}$

- ma una volta che, avendo due oggetti quantistici da descrivere, prendiamo il prodotto tensore

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{H}} &= \mathcal{L}_2(\bar{\mathbb{E}}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2, \mathbb{C}) \\ &= \mathfrak{H}^1 \otimes \mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C}) \otimes \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C})\end{aligned}$$

  degli spazi $\mathfrak{H}^1 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^1, \mathbb{C})$ e $\mathfrak{H}^2 = \mathcal{L}_2(\mathbb{E}^2, \mathbb{C})$, le onde, ormai imbrogliate in generale, si propagheranno nello spazio $\bar{\mathbb{E}} = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{E}^2$ a sei dimensioni ($\mathbb{E}^1$ e $\mathbb{E}^2$ rimangono tridimensionali)

- e come ci sono finite?

Matière et lumière

- fu il programma di de Broglie, realizzato da Schrödinger, a riempire lo spazio delle configurazioni di tali onde imbrogliate

- per de Broglie il mondo era fatto di materia e luce

- ma non contento di tale ontologia duale, voleva semplificarla ulteriormente sposando le due componenti che la costituivano

Matière et lumière

- fu il programma di de Broglie, realizzato da Schrödinger, a riempire lo spazio delle configurazioni di tali onde imbrogliate

- per de Broglie il mondo era fatto di materia e luce

- ma non contento di tale ontologia duale, voleva semplificarla ulteriormente sposando le due componenti che la costituivano

Matière et lumière

- fu il programma di de Broglie, realizzato da Schrödinger, a riempire lo spazio delle configurazioni di tali onde imbrogliate

- per de Broglie il mondo era fatto di materia e luce

- ma non contento di tale ontologia duale, voleva semplificarla ulteriormente sposando le due componenti che la costituivano

Analogie

- il comportamento della materia era descritto dalla meccanica analitica, quello della luce dall'ottica geometrica

- la stretta parentela formale tra meccanica analitica e ottica geometrica fu esplicitata nell'Ottocento da Hamilton

- come l'ottica geometrica era l'approssimazione 'geometrica' dell'ottica ondulatoria, la meccanica analitica doveva essere un'analoga approssimazione 'geometrica' di una nuova *meccanica ondulatoria*

ottica geometrica	ottica ondulatoria
meccanica analitica	**meccanica ondulatoria**

Analogie

- il comportamento della materia era descritto dalla meccanica analitica, quello della luce dall'ottica geometrica
- la stretta parentela formale tra meccanica analitica e ottica geometrica fu esplicitata nell'Ottocento da Hamilton
- come l'ottica geometrica era l'approssimazione 'geometrica' dell'ottica ondulatoria, la meccanica analitica doveva essere un'analoga approssimazione 'geometrica' di una nuova *meccanica ondulatoria*

ottica geometrica	ottica ondulatoria
meccanica analitica	**meccanica ondulatoria**

Analogie

- il comportamento della materia era descritto dalla meccanica analitica, quello della luce dall'ottica geometrica

- la stretta parentela formale tra meccanica analitica e ottica geometrica fu esplicitata nell'Ottocento da Hamilton

- come l'ottica geometrica era l'approssimazione 'geometrica' dell'ottica ondulatoria, la meccanica analitica doveva essere un'analoga approssimazione 'geometrica' di una nuova *meccanica ondulatoria*

ottica geometrica	ottica ondulatoria
meccanica analitica	**meccanica ondulatoria**

Matrimonio

- nel matrimonio di materia e luce, di meccanica e ottica, la luce non poteva non contribuire le sue onde, mentre la meccanica (analitica o ondulatoria che fosse) come spazio degli stati richiedeva come minimo lo *spazio delle configurazioni*

  [se non addirittura lo spazio degli stati lagrangiano (fibrato tangente: posizioni e velocità) o lo spazio delle fasi (fibrato cotangente: posizioni e impulsi)]

- quindi già la mera intenzione di sposare materia e luce introduceva comunque delle onde in uno spazio astratto più grande di quello tridimensionale in cui viviamo

Matrimonio

- nel matrimonio di materia e luce, di meccanica e ottica, la luce non poteva non contribuire le sue onde, mentre la meccanica (analitica o ondulatoria che fosse) come spazio degli stati richiedeva come minimo lo *spazio delle configurazioni*

  [se non addirittura lo spazio degli stati lagrangiano (fibrato tangente: posizioni e velocità) o lo spazio delle fasi (fibrato cotangente: posizioni e impulsi)]

- quindi già la mera intenzione di sposare materia e luce introduceva comunque delle onde in uno spazio astratto più grande di quello tridimensionale in cui viviamo

Onde in quale spazio?

- lo spazio delle configurazioni (a un dato istante) è ‘puramente statico,’ non dando di per se alcuna indicazione cinematica o dinamica, mentre i suoi fibrati tangente e cotangente ne danno invece

- insomma per stabilire esattamente in quale spazio dovevano propagarsi le onde quantistiche serviva una dinamica, che Schrödinger avrebbe fornito

- per capire com’è arrivato a quella dinamica toccherà prendere le mosse da lontano, con qualche cenno di meccanica lagrangiana, di meccanica hamiltoniana, e di teoria Hamilton-Jacobi

Onde in quale spazio?

- lo spazio delle configurazioni (a un dato istante) è ‘puramente statico,’ non dando di per se alcuna indicazione cinematica o dinamica, mentre i suoi fibrati tangente e cotangente ne danno invece

- insomma per stabilire esattamente in quale spazio dovevano propagarsi le onde quantistiche serviva una dinamica, che Schrödinger avrebbe fornito

- per capire com’è arrivato a quella dinamica toccherà prendere le mosse da lontano, con qualche cenno di meccanica lagrangiana, di meccanica hamiltoniana, e di teoria Hamilton-Jacobi

Onde in quale spazio?

- lo spazio delle configurazioni (a un dato istante) è ‘puramente statico,’ non dando di per se alcuna indicazione cinematica o dinamica, mentre i suoi fibrati tangente e cotangente ne danno invece

- insomma per stabilire esattamente in quale spazio dovevano propagarsi le onde quantistiche serviva una dinamica, che Schrödinger avrebbe fornito

- per capire com’è arrivato a quella dinamica toccherà prendere le mosse da lontano, con qualche cenno di meccanica lagrangiana, di meccanica hamiltoniana, e di teoria Hamilton-Jacobi

Meccanica lagrangiana

- la dinamica in meccanica lagrangiana viene data dalla *lagrangiana*

$$L : T\bar{\mathbb{E}} = \bigcup_q T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R},$$

  che inoltre serve ad 'abbassare gli indici,' cioè a caratterizzare gli *impulsi*

$$p = \dot{q}^\flat = dL_q(\dot{q}),$$

  covettori duali alle velocità $\dot{q}$, dove $dL_q(\dot{q})$ è il differenziale, al punto $\dot{q} \in T_q\bar{\mathbb{E}}$, della restrizione $L_q = L|_{T_q\bar{\mathbb{E}}} : T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ della lagrangiana allo spazio tangente [$dL_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}}$ è la trasformazione di Legendre, con immagine $dL_q(\dot{q}) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$]

- l'*energia* $\eta : T\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ è la differenza $\eta = \langle \dot{q}^\flat, \dot{q} \rangle - L$

Meccanica lagrangiana

- la dinamica in meccanica lagrangiana viene data dalla *lagrangiana*

$$L : T\bar{\mathbb{E}} = \bigcup_q T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R},$$

  che inoltre serve ad ‘abbassare gli indici,’ cioè a caratterizzare gli *impulsi*

$$p = \dot{q}^\flat = dL_q(\dot{q}),$$

  covettori duali alle velocità $\dot{q}$, dove $dL_q(\dot{q})$ è il differenziale, al punto $\dot{q} \in T_q\bar{\mathbb{E}}$, della restrizione $L_q = L|_{T_q\bar{\mathbb{E}}} : T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ della lagrangiana allo spazio tangente [$dL_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}}$ è la trasformazione di Legendre, con immagine $dL_q(\dot{q}) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$]

- l’*energia* $\eta : T\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$ è la differenza $\eta = \langle \dot{q}^\flat, \dot{q} \rangle - L$

In coordinate

- le componenti dell'impulso p saranno

$$p_k = \langle p, \partial_k \rangle = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$$

  rispetto alla base $\partial_k = \partial / \partial q^k$

- e l'energia si scriverà

$$\eta = \sum_k \dot{q}^\flat_k \dot{q}^k - L,$$

  dove $\dot{q}^\flat_k = \langle \dot{q}^\flat, \partial_k \rangle$

In coordinate

- le componenti dell'impulso p saranno

$$p_k = \langle p, \partial_k \rangle = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}$$

  rispetto alla base $\partial_k = \partial / \partial q^k$

- e l'energia si scriverà

$$\eta = \sum_k \dot{q}_k^\flat \dot{q}^k - L,$$

  dove $\dot{q}_k^\flat = \langle \dot{q}^\flat, \partial_k \rangle$

Spazio delle fasi

- gli impulsi ci portano allo *spazio delle fasi*

$$\mathit{\Gamma} = T^*\bar{\mathbb{E}} = \bigcup_q T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

fibrato cotangente dello spazio delle configurazioni nonché arena della meccanica hamiltoniana

- gli elementi dello spazio cotangente $T_q^*\bar{\mathbb{E}}$ sono gli impulsi

$$\begin{aligned} p(q) &: T_q\bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R} \\ \dot{q}(q) &\mapsto \langle p(q), \dot{q}(q) \rangle \end{aligned}$$

relativi al punto $q \in \bar{\mathbb{E}}$

Spazio delle fasi

- gli impulsi ci portano allo *spazio delle fasi*

$$\mathit{\Gamma} = T^*\bar{\mathbb{E}} = \bigcup_q T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

fibrato cotangente dello spazio delle configurazioni nonché arena della meccanica hamiltoniana

- gli elementi dello spazio cotangente $T_q^*\bar{\mathbb{E}}$ sono gli impulsi

$$\begin{aligned} p(q) : T_q\bar{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ \dot{q}(q) &\mapsto \langle p(q), \dot{q}(q) \rangle \end{aligned}$$

relativi al punto $q \in \bar{\mathbb{E}}$

Meccanica hamiltoniana

- la dinamica qui viene data dall'*hamiltoniana*

$$
\begin{aligned}
&H = \langle p, p^\sharp \rangle - L^* : \mathit{\Gamma} \to \mathbb{R} \\
&z = (q, p) \mapsto H(z),
\end{aligned}
$$

che assegna al punto $z = (q, p) = (q, \dot{q}^\flat) \in \mathit{\Gamma}$ lo stesso valore $H(q, p) = \eta(q, \dot{q})$ che l'energia assegna al punto $(q, \dot{q}) = (q, p^\sharp) \in T\bar{\mathbb{E}}$, dove $p^\sharp = dH_q(p)$, e la 'lagrangiana dello spazio delle fasi'

$$
\begin{aligned}
&L^* : \mathit{\Gamma} \to \mathbb{R} \\
&z = (q, p) \mapsto L^*(z)
\end{aligned}
$$

analogamente assegna al punto $z = (q, p) = (q, \dot{q}^\flat) \in \mathit{\Gamma}$ lo stesso valore $L^*(q, p) = L(q, \dot{q})$ che la lagrangiana assegna al punto $(q, \dot{q}) = (q, p^\sharp) \in T\bar{\mathbb{E}}$

Equazioni di Hamilton

- la *due-forma simplettica* $\Omega : T_z\mathit{\Gamma} \times T_z\mathit{\Gamma} \to \mathbb{R}$, o meglio $\Omega^\sharp : T_z^*\mathit{\Gamma} \to T_z\mathit{\Gamma}$, trasforma la uno-forma dH nel campo vettoriale

$$X = \Omega^\sharp(dH),$$

che esprime il contenuto delle tradizionali equazioni di Hamilton

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q^k} = \langle dp_k, X \rangle$$

(che possono essere viste come riformulazione della *lex secunda* di Newton) e

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H}{\partial p_k} = \langle dq^k, X \rangle$$

(che invece sono le componenti $\dot{q}^k = \langle dq^k, \dot{q} \rangle$ della trasformata di Legendre 'inversa' $\dot{q} = dH_q(p)$)

Congruenza nello spazio delle fasi

- integrando il campo vettoriale X otteniamo una congruenza di curve in Γ che esprime il determinismo della meccanica classica: ogni punto dello spazio delle fasi, rappresentando un impulso a una posizione, determina un'unica evoluzione del sistema

Matassa nello spazio delle configurazioni

- proiettando la congruenza dallo spazio delle fasi allo spazio soggiacente delle configurazioni otteniamo una matassa: ora da ogni punto $q \in \bar{\mathbb{E}}$ passano tante curve, che corrispondono ai vari impulsi possibili a q

- ma la teoria Hamilton-Jacobi ci permette di estrarre una nuova congruenza dalla matassa precisando una superficie iniziale Σ (di codimensione uno nello spazio delle configurazioni)

Matassa nello spazio delle configurazioni

- proiettando la congruenza dallo spazio delle fasi allo spazio soggiacente delle configurazioni otteniamo una matassa: ora da ogni punto $q \in \bar{\mathbb{E}}$ passano tante curve, che corrispondono ai vari impulsi possibili a q

- ma la teoria Hamilton-Jacobi ci permette di estrarre una nuova congruenza dalla matassa precisando una superficie iniziale Σ (di codimensione uno nello spazio delle configurazioni)

Quantità di moto

- ammettendo con Schrödinger che l'hamiltoniana abbia la forma (tipicamente meccanica) $H = T + V(q)$, dove T è l'energia cinetica e il potenziale V dipende solo dalle posizioni e non dagli impulsi, un'energia totale $E =$ cost. verrà mantenuta lungo tutta l'evoluzione dinamica

- l'energia cinetica a ogni punto q sarà pertanto la differenza $T(q) = E - V(q)$

- se inoltre l'energia cinetica doppia $2T$ ha la forma 'quadratica'

$$\langle p, p^\sharp \rangle = \|p\|^2,$$

conosceremo anche il modulo

$$\mathfrak{p} = \|p\| = \langle p, p^\sharp \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(E - V)}$$

dell'impulso

- avendo ora una *quantità* di moto ci manca solo una *direzione* di moto

Quantità di moto

- ammettendo con Schrödinger che l'hamiltoniana abbia la forma (tipicamente meccanica) $H = T + V(q)$, dove T è l'energia cinetica e il potenziale V dipende solo dalle posizioni e non dagli impulsi, un'energia totale $E =$ cost. verrà mantenuta lungo tutta l'evoluzione dinamica

- l'energia cinetica a ogni punto q sarà pertanto la differenza $T(q) = E - V(q)$

- se inoltre l'energia cinetica doppia $2T$ ha la forma 'quadratica'

$$\langle p, p^\sharp \rangle = \|p\|^2,$$

conosceremo anche il modulo

$$\mathfrak{p} = \|p\| = \langle p, p^\sharp \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(E - V)}$$

dell'impulso

- avendo ora una *quantità* di moto ci manca solo una *direzione* di moto

Quantità di moto

- ammettendo con Schrödinger che l'hamiltoniana abbia la forma (tipicamente meccanica) $H = T + V(q)$, dove T è l'energia cinetica e il potenziale V dipende solo dalle posizioni e non dagli impulsi, un'energia totale $E =$ cost. verrà mantenuta lungo tutta l'evoluzione dinamica

- l'energia cinetica a ogni punto q sarà pertanto la differenza $T(q) = E - V(q)$

- se inoltre l'energia cinetica doppia $2T$ ha la forma 'quadratica'

$$\langle p, p^\sharp \rangle = \|p\|^2,$$

conosceremo anche il modulo

$$\mathfrak{p} = \|p\| = \langle p, p^\sharp \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(E - V)}$$

dell'impulso

- avendo ora una *quantità* di moto ci manca solo una *direzione* di moto

Quantità di moto

- ammettendo con Schrödinger che l'hamiltoniana abbia la forma (tipicamente meccanica) $H = T + V(q)$, dove T è l'energia cinetica e il potenziale V dipende solo dalle posizioni e non dagli impulsi, un'energia totale $E =$ cost. verrà mantenuta lungo tutta l'evoluzione dinamica

- l'energia cinetica a ogni punto q sarà pertanto la differenza $T(q) = E - V(q)$

- se inoltre l'energia cinetica doppia $2T$ ha la forma 'quadratica'

$$\langle p, p^\sharp \rangle = \|p\|^2,$$

  conosceremo anche il modulo

$$\mathfrak{p} = \|p\| = \langle p, p^\sharp \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2(E - V)}$$

  dell'impulso

- avendo ora una *quantità* di moto ci manca solo una *direzione* di moto

Direzione di moto

- la direzione del moto ci viene data dalla superficie Σ, anzi dal suo orientamento $T_q\Sigma \subset T_q\bar{\mathbb{E}}$ al punto $q \in \Sigma$, orientamento che darà il raggio

$$\bar{p} = (T_q\Sigma)^\perp = \{p \in T_q^*\bar{\mathbb{E}} : \langle p, \dot{q} \rangle = 0, \dot{q} \in T_q\Sigma\}$$

che appunto è una direzione

- il raggio $\bar{p}$ taglierà la sfera

$$\Xi = \{p : \langle p, p^\sharp \rangle = 2(E - V)\}$$

determinata da $\mathfrak{p}$ in due punti $\bar{p} \cap \Xi$

- scegliamone uno, chiamandolo $p = p(q)$

Direzione di moto

- la direzione del moto ci viene data dalla superficie Σ, anzi dal suo orientamento $T_q\Sigma \subset T_q\bar{\mathbb{E}}$ al punto $q \in \Sigma$, orientamento che darà il raggio

$$\bar{p} = (T_q\Sigma)^{\perp} = \{p \in T_q^*\bar{\mathbb{E}} : \langle p, \dot{q}\rangle = 0, \dot{q} \in T_q\Sigma\}$$

  che appunto è una direzione

- il raggio $\bar{p}$ taglierà la sfera

$$\Xi = \{p : \langle p, p^{\sharp}\rangle = 2(E - V)\}$$

  determinata da $\mathfrak{p}$ in due punti $\bar{p} \cap \Xi$

- scegliamone uno, chiamandolo $p = p(q)$

Direzione di moto

- la direzione del moto ci viene data dalla superficie Σ, anzi dal suo orientamento $T_q\Sigma \subset T_q\bar{\mathbb{E}}$ al punto $q \in \Sigma$, orientamento che darà il raggio

  $$\bar{p} = (T_q\Sigma)^{\perp} = \{p \in T_q^*\bar{\mathbb{E}} : \langle p, \dot{q} \rangle = 0, \dot{q} \in T_q\Sigma\}$$

  che appunto è una direzione

- il raggio $\bar{p}$ taglierà la sfera

  $$\Xi = \{p : \langle p, p^{\sharp} \rangle = 2(E - V)\}$$

  determinata da $\mathfrak{p}$ in due punti $\bar{p} \cap \Xi$

- scegliamone uno, chiamandolo $p = p(q)$

Estrazione della congruenza

- avendo ora un impulso a ogni punto di Σ, il determinismo della meccanica classica fornirà un'unica evoluzione attraverso ogni punto di Σ

- quindi dalla matassa di curve dinamicamente possibili nello spazio delle configurazioni abbiamo estratto una congruenza perpendicolare alla superficie iniziale scelta

Estrazione della congruenza

- avendo ora un impulso a ogni punto di Σ, il determinismo della meccanica classica fornirà un'unica evoluzione attraverso ogni punto di Σ

- quindi dalla matassa di curve dinamicamente possibili nello spazio delle configurazioni abbiamo estratto una congruenza perpendicolare alla superficie iniziale scelta

Teoria Hamilton-Jacobi

- poniamo ora che Σ sia superficie di livello S_0 dell'‘azione’ $S : \bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$, il cui differenziale dS è l'impulso p, in coordinate

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k} = \langle dS, \partial_k \rangle$$

- l'impulso $dS = p = dL_q(\dot{q})$ duale alla velocità $\dot{q}$ tangente (in ogni punto) alla congruenza che Σ ha estratto dalla matassa permette di costruire il resto della funzione S

Teoria Hamilton-Jacobi

- poniamo ora che Σ sia superficie di livello S_0 dell'‘azione’ $S : \bar{\mathbb{E}} \to \mathbb{R}$, il cui differenziale dS è l'impulso p, in coordinate

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q^k} = \langle dS, \partial_k \rangle$$

- l'impulso $dS = p = dL_q(\dot{q})$ duale alla velocità $\dot{q}$ tangente (in ogni punto) alla congruenza che Σ ha estratto dalla matassa permette di costruire il resto della funzione S

Costruzione di Schrödinger

Nun gibt einerseits, wie wir sogleich ziegen werden, die Gleichung (6) eine genaue Konstruktionsvorschrift, um aus irgendeiner Fläche dieser Schar, *wenn sie und ihr W-Wert bekannt ist*, sukzessive alle übrigen und ihre W-Werte zu konstruieren. Andererseits läßt sich das einzige zu dieser Konstruktion benötigte Datum, nämlich die *eine* Fläche und ihr W-Wert, *völlig willkürlich vorgeben* und alsdann nach der Konstruktionsvorschrift genau *zwei*deutig zu einer der Forderung genügenden Funktion W ergänzen. Bei alledem denken wir vorläufig die Zeit konstant. – Die Konstruktionsvorschrift *erschöpft* also den Inhalt der Differentialgleichung, mann kan *jede* ihrer Lösungen aus einer passend angenommenen Fläche plus W-Wert erhalten.

Costruzione di una superficie vicina

- per costruire la superficie relativa al valore $S_0 + \delta S$ bisogna sapere quanto (spazio) avanzare da ogni punto di Σ

- il rapporto fra spazio e azione viene dato da $\delta S = p_k \delta q_k$, anzi da $\delta s = \delta S / \mathfrak{p}$, dove δs è la distanza relativa alla differenza δS

- procedendo da ogni punto di Σ una distanza $\delta S / \mathfrak{p}$ nella direzione normale (duale a $\bar{p}$) determinata da $p^\sharp$ otteniamo la superficie relativa a $S_0 + \delta S$

- oppure, prescindendo dalla direzione normale, possiamo fare l'inviluppo di tutte le 'onde secondarie' di raggio $\delta S / \mathfrak{p}$ che emanano da Σ

- proseguendo così abbiamo già delle onde nello spazio delle configurazioni

Costruzione di una superficie vicina

- per costruire la superficie relativa al valore $S_0 + \delta S$ bisogna sapere quanto (spazio) avanzare da ogni punto di Σ
- il rapporto fra spazio e azione viene dato da $\delta S = p_k \delta q_k$, anzi da $\delta s = \delta S/\mathfrak{p}$, dove δs è la distanza relativa alla differenza δS
- procedendo da ogni punto di Σ una distanza $\delta S/\mathfrak{p}$ nella direzione normale (duale a $\bar{p}$) determinata da $p^\sharp$ otteniamo la superficie relativa a $S_0 + \delta S$
- oppure, prescindendo dalla direzione normale, possiamo fare l'inviluppo di tutte le 'onde secondarie' di raggio $\delta S/\mathfrak{p}$ che emanano da Σ
- proseguendo così abbiamo già delle onde nello spazio delle configurazioni

Costruzione di una superficie vicina

- per costruire la superficie relativa al valore $S_0 + \delta S$ bisogna sapere quanto (spazio) avanzare da ogni punto di Σ

- il rapporto fra spazio e azione viene dato da $\delta S = p_k \delta q_k$, anzi da $\delta s = \delta S / \mathfrak{p}$, dove δs è la distanza relativa alla differenza δS

- procedendo da ogni punto di Σ una distanza $\delta S / \mathfrak{p}$ nella direzione normale (duale a $\bar{p}$) determinata da $p^\sharp$ otteniamo la superficie relativa a $S_0 + \delta S$

- oppure, prescindendo dalla direzione normale, possiamo fare l'inviluppo di tutte le 'onde secondarie' di raggio $\delta S / \mathfrak{p}$ che emanano da Σ

- proseguendo così abbiamo già delle onde nello spazio delle configurazioni

Costruzione di una superficie vicina

- per costruire la superficie relativa al valore $S_0 + \delta S$ bisogna sapere quanto (spazio) avanzare da ogni punto di Σ

- il rapporto fra spazio e azione viene dato da $\delta S = p_k \delta q_k$, anzi da $\delta s = \delta S / \mathfrak{p}$, dove δs è la distanza relativa alla differenza δS

- procedendo da ogni punto di Σ una distanza $\delta S / \mathfrak{p}$ nella direzione normale (duale a $\bar{p}$) determinata da $p^\sharp$ otteniamo la superficie relativa a $S_0 + \delta S$

- oppure, prescindendo dalla direzione normale, possiamo fare l'inviluppo di tutte le 'onde secondarie' di raggio $\delta S / \mathfrak{p}$ che emanano da Σ

- proseguendo così abbiamo già delle onde nello spazio delle configurazioni

Costruzione di una superficie vicina

- per costruire la superficie relativa al valore $S_0 + \delta S$ bisogna sapere quanto (spazio) avanzare da ogni punto di Σ

- il rapporto fra spazio e azione viene dato da $\delta S = p_k \delta q_k$, anzi da $\delta s = \delta S/\mathfrak{p}$, dove δs è la distanza relativa alla differenza δS

- procedendo da ogni punto di Σ una distanza $\delta S/\mathfrak{p}$ nella direzione normale (duale a $\bar{p}$) determinata da $p^\sharp$ otteniamo la superficie relativa a $S_0 + \delta S$

- oppure, prescindendo dalla direzione normale, possiamo fare l'inviluppo di tutte le 'onde secondarie' di raggio $\delta S/\mathfrak{p}$ che emanano da Σ

- proseguendo così abbiamo già delle onde nello spazio delle configurazioni

Onde nello spazio delle configurazioni?

- innanzitutto sono delle ‘onde’ un po’ ideali, geometriche

- incapaci d’interferenza, di sovrapposizione

- inoltre sono *fattorizzabili*, non imbrogliate: un’opportuna riformulazione (invertibile!) darebbe a ogni oggetto la sua

- poi le vere onde sono più che una mera ‘foliazione’ in superfici di livello

- dovrebbero come minimo propagarsi …

Onde nello spazio delle configurazioni?

- innanzitutto sono delle ‘onde’ un po’ ideali, geometriche
- incapaci d’interferenza, di sovrapposizione
- inoltre sono *fattorizzabili*, non imbrogliate: un’opportuna riformulazione (invertibile!) darebbe a ogni oggetto la sua
- poi le vere onde sono più che una mera ‘foliazione’ in superfici di livello
- dovrebbero come minimo propagarsi …

Onde nello spazio delle configurazioni?

- innanzitutto sono delle ‘onde’ un po’ ideali, geometriche

- incapaci d’interferenza, di sovrapposizione

- inoltre sono *fattorizzabili*, non imbrogliate: un’opportuna riformulazione (invertibile!) darebbe a ogni oggetto la sua

- poi le vere onde sono più che una mera ‘foliazione’ in superfici di livello

- dovrebbero come minimo propagarsi …

Onde nello spazio delle configurazioni?

- innanzitutto sono delle ‘onde’ un po’ ideali, geometriche
- incapaci d’interferenza, di sovrapposizione
- inoltre sono *fattorizzabili*, non imbrogliate: un’opportuna riformulazione (invertibile!) darebbe a ogni oggetto la sua
- poi le vere onde sono più che una mera ‘foliazione’ in superfici di livello
- dovrebbero come minimo propagarsi …

Onde nello spazio delle configurazioni?

- innanzitutto sono delle ‘onde’ un po’ ideali, geometriche
- incapaci d’interferenza, di sovrapposizione
- inoltre sono *fattorizzabili*, non imbrogliate: un’opportuna riformulazione (invertibile!) darebbe a ogni oggetto la sua
- poi le vere onde sono più che una mera ‘foliazione’ in superfici di livello
- dovrebbero come minimo propagarsi …

Evoluzione temporale

- quindi prima di 'quantizzare,' introducendo i numeri complessi che permetteranno sovrapposizione, interferenza e imbroglio, vediamo come le nostre onde 'geometriche' evolvono nel tempo

- fin qui è stato espresso il contenuto dell'equazione di Hamilton-Jacobi 'statica'

$$H(q, dS) = E$$

- per l'evoluzione delle onde serve

$$H(q, dW) = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

dove

$$S - Et = W : \bar{\mathbb{E}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Evoluzione temporale

- quindi prima di ‘quantizzare,’ introducendo i numeri complessi che permetteranno sovrapposizione, interferenza e imbroglio, vediamo come le nostre onde ‘geometriche’ evolvono nel tempo

- fin qui è stato espresso il contenuto dell’equazione di Hamilton-Jacobi ‘statica’

$$H(q, dS) = E$$

- per l’evoluzione delle onde serve

$$H(q, dW) = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

dove

$$S - Et = W : \bar{\mathbb{E}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Evoluzione temporale

- quindi prima di 'quantizzare,' introducendo i numeri complessi che permetteranno sovrapposizione, interferenza e imbroglio, vediamo come le nostre onde 'geometriche' evolvono nel tempo

- fin qui è stato espresso il contenuto dell'equazione di Hamilton-Jacobi 'statica'

$$H(q, dS) = E$$

- per l'evoluzione delle onde serve

$$H(q, dW) = -\frac{\partial W}{\partial t},$$

dove

$$S - Et = W : \bar{\mathbb{E}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Evoluzione dell'azione

- scrivendo
$$\Delta W = \Delta(S - Et) = -E\Delta t$$
vediamo che, rimanendo fermi a un punto nello spazio delle configurazioni, l'azione diminuirà di $E\Delta t$ nel tempo Δt

- le superfici di livello rimangono tutte invariate, cambiano solo i valori di azione associati

- nel tempo Δt ogni fronte d'onda perde $E\Delta t$

- ci possiamo immaginare che i valori d'azione avanzano attraverso le onde ferme; oppure che le onde stesse avanzano, ognuna portandosi dietro la propria azione mentre si adatta alla forma delle superfici precedenti

Evoluzione dell'azione

- scrivendo

$$\Delta W = \Delta(S - Et) = -E\Delta t$$

  vediamo che, rimanendo fermi a un punto nello spazio delle configurazioni, l'azione diminuirà di $E\Delta t$ nel tempo Δt

- le superfici di livello rimangono tutte invariate, cambiano solo i valori di azione associati

- nel tempo Δt ogni fronte d'onda perde $E\Delta t$

- ci possiamo immaginare che i valori d'azione avanzano attraverso le onde ferme; oppure che le onde stesse avanzano, ognuna portandosi dietro la propria azione mentre si adatta alla forma delle superfici precedenti

Evoluzione dell'azione

- scrivendo
$$\Delta W = \Delta(S - Et) = -E\Delta t$$
vediamo che, rimanendo fermi a un punto nello spazio delle configurazioni, l'azione diminuirà di $E\Delta t$ nel tempo Δt
- le superfici di livello rimangono tutte invariate, cambiano solo i valori di azione associati
- nel tempo Δt ogni fronte d'onda perde $E\Delta t$
- ci possiamo immaginare che i valori d'azione avanzano attraverso le onde ferme; oppure che le onde stesse avanzano, ognuna portandosi dietro la propria azione mentre si adatta alla forma delle superfici precedenti

Evoluzione dell'azione

- scrivendo
$$\Delta W = \Delta(S - Et) = -E\Delta t$$
vediamo che, rimanendo fermi a un punto nello spazio delle configurazioni, l'azione diminuirà di $E\Delta t$ nel tempo Δt
- le superfici di livello rimangono tutte invariate, cambiano solo i valori di azione associati
- nel tempo Δt ogni fronte d'onda perde $E\Delta t$
- ci possiamo immaginare che i valori d'azione avanzano attraverso le onde ferme; oppure che le onde stesse avanzano, ognuna portandosi dietro la propria azione mentre si adatta alla forma delle superfici precedenti

Velocità di propagazione

- per esempio la superficie iniziale Σ con valore $W_0 = S_0$ assumerà dopo Δt la posizione occupata in partenza dalla superficie che allora aveva il valore $W_0 + E\Delta t$

- da $\delta W = -E\delta t$ e $\delta W = \mathfrak{p}\delta s$ ricaviamo la velocità

$$u = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{E}{\mathfrak{p}}$$

  di propagazione delle onde

- la velocità $\dot{q}$ del punto meccanico, con modulo $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E-V)}$, è in ragione inversa di quella dell'onda

Velocità di propagazione

- per esempio la superficie iniziale Σ con valore $W_0 = S_0$ assumerà dopo Δt la posizione occupata in partenza dalla superficie che allora aveva il valore $W_0 + E\Delta t$

- da $\delta W = -E\delta t$ e $\delta W = \mathfrak{p}\delta s$ ricaviamo la velocità

$$u = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{E}{\mathfrak{p}}$$

  di propagazione delle onde

- la velocità $\dot{q}$ del punto meccanico, con modulo $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E-V)}$, è in ragione inversa di quella dell'onda

Velocità di propagazione

- per esempio la superficie iniziale Σ con valore $W_0 = S_0$ assumerà dopo Δt la posizione occupata in partenza dalla superficie che allora aveva il valore $W_0 + E\Delta t$

- da $\delta W = -E\delta t$ e $\delta W = \mathfrak{p}\delta s$ ricaviamo la velocità

$$u = \frac{\delta s}{\delta t} = \frac{E}{\mathfrak{p}}$$

  di propagazione delle onde

- la velocità $\dot{q}$ del punto meccanico, con modulo $\sqrt{2T} = \sqrt{2(E - V)}$, è in ragione inversa di quella dell'onda

Wellenbewegung

Jetzt erkennt man, daß unser Flächensystem $W = \text{const.}$ aufgefaßt werden kann als das System der Wellenflächen einer fortschreitenden, aber stationären Wellenbewegung im q-Raum, für welche der Betrag der Phasengeschwindigkeit in jedem Punkt des Raumes durch $[u = E/\mathfrak{p}]$ gegeben ist.

Ottica geometrica

- i termini usati finora, come impulso e azione, fanno pensare alla meccanica

- ma abbiamo anche un'ottica geometrica, in cui le traiettorie meccaniche diventano raggi di luce e le superfici di egual azione diventano superfici di egual tempo

- il mezzo luminifero è inomogeneo, con indice di rifrazione $1/u$

- è anche isotropo, se prendiamo la metrica 'cinetica' $m(\,\cdot\,,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \times T_q\bar{\mathbb{E}}$, anzi la versione 'abbassante'

$$m^\flat(\,\cdot\,) = dL_q(\,\cdot\,) = dT_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

  dove l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\langle m^\flat \dot{q}, \dot{q}\rangle = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$$

Ottica geometrica

- i termini usati finora, come impulso e azione, fanno pensare alla meccanica
- ma abbiamo anche un'ottica geometrica, in cui le traiettorie meccaniche diventano raggi di luce e le superfici di egual azione diventano superfici di egual tempo
- il mezzo luminifero è inomogeneo, con indice di rifrazione $1/u$
- è anche isotropo, se prendiamo la metrica 'cinetica' $m(\,\cdot\,,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \times T_q\bar{\mathbb{E}}$, anzi la versione 'abbassante'

$$m^\flat(\,\cdot\,) = dL_q(\,\cdot\,) = dT_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

dove l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\langle m^\flat \dot{q}, \dot{q}\rangle = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$$

Ottica geometrica

- i termini usati finora, come impulso e azione, fanno pensare alla meccanica
- ma abbiamo anche un'ottica geometrica, in cui le traiettorie meccaniche diventano raggi di luce e le superfici di egual azione diventano superfici di egual tempo
- il mezzo luminifero è inomogeneo, con indice di rifrazione $1/u$
- è anche isotropo, se prendiamo la metrica 'cinetica' $m(\,\cdot\,,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \times T_q\bar{\mathbb{E}}$, anzi la versione 'abbassante'

$$m^\flat(\,\cdot\,) = dL_q(\,\cdot\,) = dT_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

dove l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\langle m^\flat \dot{q}, \dot{q}\rangle = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$$

Ottica geometrica

- i termini usati finora, come impulso e azione, fanno pensare alla meccanica
- ma abbiamo anche un'ottica geometrica, in cui le traiettorie meccaniche diventano raggi di luce e le superfici di egual azione diventano superfici di egual tempo
- il mezzo luminifero è inomogeneo, con indice di rifrazione $1/u$
- è anche isotropo, se prendiamo la metrica 'cinetica' $m(\,\cdot\,,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \times T_q\bar{\mathbb{E}}$, anzi la versione 'abbassante'

$$m^\flat(\,\cdot\,) = dL_q(\,\cdot\,) = dT_q(\,\cdot\,) : T_q\bar{\mathbb{E}} \to T_q^*\bar{\mathbb{E}},$$

  dove l'energia cinetica

$$T = \frac{1}{2}\langle m^\flat \dot{q}, \dot{q}\rangle = \frac{1}{2}\|\dot{q}\|^2$$

Tensore metrico

- in meccanica la metrica avrà matrice (canonica)

$$
\begin{pmatrix}
m^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & m^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & m^1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & m^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & m^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^2
\end{pmatrix},
$$

  dove m^1 ed m^2 sono le masse dei due gravi

- lungo la diagonale della corrispondente matrice in ottica ci saranno invece i coefficienti dielettrici

Tensore metrico

- in meccanica la metrica avrà matrice (canonica)

$$\begin{pmatrix} m^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m^2 \end{pmatrix},$$

  dove m^1 ed m^2 sono le masse dei due gravi

- lungo la diagonale della corrispondente matrice in ottica ci saranno invece i coefficienti dielettrici

Huyghens

- la teoria diventa ‘anisotropa’ rispetto a una metrica più fondamentale ‘pitagorica,’ con matrice diag$(1, \ldots, 1)$

- rientriamo nel caso, con onde secondarie elissoidali, a cui Huyghens già si riferiva nel titolo della sua opera sull’ottica:

> Traité de la lumière, où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, et dans la réfraction ; et particulièrement dans l’étrange réfraction du cristal d’Islande

Huyghens

- la teoria diventa ‘anisotropa’ rispetto a una metrica più fondamentale ‘pitagorica,’ con matrice diag$(1, \ldots, 1)$

- rientriamo nel caso, con onde secondarie elissoidali, a cui Huyghens già si riferiva nel titolo della sua opera sull’ottica:

> Traité de la lumière, où sont expliquées les causes de ce qui luy arrive dans la reflexion, et dans la réfraction ; et particulièrement dans l’étrange réfraction du cristal d’Islande

Velocità e densità

- la velocità del punto meccanico sarà grande laddove le superfici d'onda sono fitte

- la velocità delle onde (meccaniche o ottiche che siano) sarà invece grande laddove le superfici sono rade

- il differenziale $dW = p$ pertanto diventa la *lentezza normale* nell'ottica di Hamilton

Velocità e densità

- la velocità del punto meccanico sarà grande laddove le superfici d'onda sono fitte

- la velocità delle onde (meccaniche o ottiche che siano) sarà invece grande laddove le superfici sono rade

- il differenziale $dW = p$ pertanto diventa la *lentezza normale* nell'ottica di Hamilton

Velocità e densità

- la velocità del punto meccanico sarà grande laddove le superfici d'onda sono fitte
- la velocità delle onde (meccaniche o ottiche che siano) sarà invece grande laddove le superfici sono rade
- il differenziale $dW = p$ pertanto diventa la *lentezza normale* nell'ottica di Hamilton

Relazione di Planck

- per ora abbiamo delle onde che si propagano a velocità

$$u = \frac{E}{\mathfrak{p}} = \frac{E}{\sqrt{2(E - V)}}$$

nello spazio delle configurazioni

- Schrödinger introduce la relazione $E = h\nu$ di Planck, permettendogli di scrivere

(3) $$u = \frac{h\nu}{\sqrt{2(h\nu - V)}}$$

Relazione di Planck

- per ora abbiamo delle onde che si propagano a velocità

$$u = \frac{E}{\mathfrak{p}} = \frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}$$

nello spazio delle configurazioni

- Schrödinger introduce la relazione $E = h\nu$ di Planck, permettendogli di scrivere

$$u = \frac{h\nu}{\sqrt{2(h\nu - V)}} \tag{3}$$

Equazione delle onde

- postulando delle onde fisiche che si propagano nello spazio delle configurazioni, Schrödinger scrive l'equazione

$$\text{div grad}\, \psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0,$$

  proveniente dall'ottica ondulatoria

- *mit Beachtung von* (3) ottiene

$$\text{div grad}\, \psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0,$$

  le cui soluzioni sono funzioni complesse, generalmente imbrogliate, appartenenti a $\mathcal{L}_2(\bar{\mathbb{E}}, \mathbb{C})$

Equazione delle onde

- postulando delle onde fisiche che si propagano nello spazio delle configurazioni, Schrödinger scrive l'equazione

$$\text{div grad}\ \psi - \frac{1}{u^2}\ddot{\psi} = 0,$$

proveniente dall'ottica ondulatoria

- *mit Beachtung von* (3) ottiene

$$\text{div grad}\ \psi - \frac{8\pi^2}{h^2}(E - V)\psi = 0,$$

le cui soluzioni sono funzioni complesse, generalmente imbrogliate, appartenenti a $\mathcal{L}_2(\bar{\mathbb{E}}, \mathbb{C})$